

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen																								
Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch systematisches Probieren (Kerzen)		19																								
<p>Zwei Kerzen brennen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ab. Die weiße Kerze ist 42 cm lang und wird pro Stunde um 5 cm kürzer. Die blaue Kerze ist 24 cm lang und wird pro Stunde um 2 cm kürzer.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Untersuche, nach wie viel Stunden beide Kerzen die gleiche Höhe haben. Fülle dazu die folgende Tabelle aus. <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">Zeit (x) in Stunden</th> <th style="padding: 5px;">Länge der weißen Kerze in cm</th> <th style="padding: 5px;">Länge der blauen Kerze in cm</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">42</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">2</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">4</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">6</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">7</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">8</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> </tbody> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 20px;"> </div>			Zeit (x) in Stunden	Länge der weißen Kerze in cm	Länge der blauen Kerze in cm	0	42		1			2			4			6			7			8		
Zeit (x) in Stunden	Länge der weißen Kerze in cm	Länge der blauen Kerze in cm																								
0	42																									
1																										
2																										
4																										
6																										
7																										
8																										

Bild 15: „Kerzen“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen															
Finden von Lösungen durch systematisches Probieren (Obstkörbe)		20															
<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;"> </div> <p>In einem Korb befinden sich Erdbeeren und in vier gleich schweren Körben Blaubeeren. Zusammen wiegen die Körbe 9 kg. Die Gleichung dazu lautet: $e + 4 \cdot b = 9$.</p> <p>Jana überlegt: Wenn die Erdbeeren 4 kg wiegen würden und die Blaubeeren jeweils 1,5 kg, dann wäre die Gesamtmasse 10 kg. Also zu viel.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Probiere weitere Zahlen für die Masse der Blaubeerkörbe aus, bis du eine Lösung gefunden hast. Nutze für deine Rechnungen die Tabelle. <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">e</th> <th style="padding: 5px;">b</th> <th style="padding: 5px;">$e + 4 \cdot b$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">1,5</td> <td style="padding: 5px;">$4 + 4 \cdot 1,5 = 10$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> • Finde durch Probieren eine Lösung, wenn die Erdbeeren nun 4,4 kg wiegen. 			e	b	$e + 4 \cdot b$	4	1,5	$4 + 4 \cdot 1,5 = 10$	4	1		4			4		
e	b	$e + 4 \cdot b$															
4	1,5	$4 + 4 \cdot 1,5 = 10$															
4	1																
4																	
4																	

Bild 16: „Obstkörbe“, Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Finden von Lösungen durch Probieren (Obstkörbe)		21
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> </div> <p>In einem Korb befinden sich Erdbeeren und in vier gleich schweren Körben befinden sich Blaubeeren. Zusammen wiegen die Körbe 7 kg. Toni stellt dazu eine Gleichung auf: $x + 4 \cdot y = 7$ Dabei bezeichnet er die Masse der Erdbeeren mit x und die Masse eines Blaubeerkorbs mit y.</p> <p>Toni überlegt, wie schwer die Obstkörbe sein könnten. Er findet zwei Möglichkeiten:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Die Erdbeeren wiegen 3 kg und die Blaubeeren jeweils 1 kg, denn $3 + 4 \cdot 1 = 7$. 2. Die Erdbeeren wiegen 1 kg und die Blaubeeren jeweils 1,5 kg, denn $1 + 4 \cdot 1,5 = 7$. <ul style="list-style-type: none"> • Finde eine weitere Möglichkeit und schreibe sie auf. 		

Bild 17: „Obstkörbe“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen																								
Finden von Lösungen durch systematisches Probieren (Spielzeugtiere)		22																								
<div style="text-align: center;"> </div> <p>Florentine darf sich von ihrem Taschengeld Spielzeugtiere kaufen. Sie gibt höchstens 50 € aus. Die kleineren Tiere kosten 7 €, die größeren 11 €.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Finde heraus, wie viele Tiere sie sich höchstens gekauft hat. Fülle dazu die Tabelle aus. <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">Anzahl der kleinen Tiere</th> <th style="padding: 5px;">Anzahl der großen Tiere</th> <th style="padding: 5px;">Gesamtpreis</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">2</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">3</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">4</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">5</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">6</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">7</td><td style="padding: 5px;"></td><td style="padding: 5px;"></td></tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> • Gib jeweils die Anzahl an großen und kleinen Tieren an, wenn Florentine <i>genau</i> 50 € ausgegeben hat. 			Anzahl der kleinen Tiere	Anzahl der großen Tiere	Gesamtpreis	1			2			3			4			5			6			7		
Anzahl der kleinen Tiere	Anzahl der großen Tiere	Gesamtpreis																								
1																										
2																										
3																										
4																										
5																										
6																										
7																										

Bild 18: „Spielzeugtiere 1“, Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch systematisches Probieren (Waage)		23
<p>Das dargestellte Bild lässt sich durch die folgende Gleichung beschreiben: $4x + 5 = 17$.</p> <p>Achmed überlegt, wie viele Kugeln in einem Beutel sind.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Setze für x nacheinander verschiedene Zahlen ein. Lege dafür eine Tabelle an. Beginne mit $x = 1$. <p style="padding-left: 40px;">Wie viele Kugeln sind in einem Beutel?</p>		

Bild 19: „Waage“, Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch systematisches Probieren (Waage)		24
<p>Das dargestellte Bild lässt sich durch die folgende Gleichung beschreiben: $3x + 5 = x + 17$</p> <p>Katrin überlegt, wie viele Kugeln in einem Beutel sind.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Setze für x nacheinander verschiedene Zahlen ein. Lege dafür eine Tabelle an. Beginne mit $x = 1$. <p style="padding-left: 40px;">Finde die Anzahl an Kugeln in einem Beutel heraus.</p>		

Bild 20: „Waage“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Ermitteln der fehlenden Masse, um ein Gleichgewicht herzustellen (Waage)		25
<p>Die obige Waage war im Gleichgewicht, bis auf der rechten Seite etwas weggenommen wurde.</p> <ul style="list-style-type: none"> Ermittle, wie viel Gramm auf der rechten Seite fehlen, wenn ein Teddy 225 g wiegt. 		

Bild 21: „Waage_2“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen															
Bestimmen der Lösung durch systematisches Probieren mit Intervallschachtelung		26															
<p>Gegeben ist die Gleichung: $8 \cdot x + 12 = 14$.</p> <ul style="list-style-type: none"> Begründe, dass die Lösung kleiner sein muss als 1, aber größer als 0. Fülle die folgende Tabelle aus. 																	
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60%; margin: auto;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">x</th> <th style="padding: 5px;">$8 \cdot x + 12$</th> <th style="padding: 5px;"><, > oder = 14</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">0,1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">0,2</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">0,3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">0,4</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			x	$8 \cdot x + 12$	<, > oder = 14	0,1			0,2			0,3			0,4		
x	$8 \cdot x + 12$	<, > oder = 14															
0,1																	
0,2																	
0,3																	
0,4																	
<ul style="list-style-type: none"> Entscheide, zwischen welchen beiden Zahlen die richtige Lösung liegen muss. Lege eine neue Tabelle an und setze weitere Zahlen ein, um die Lösung zu bestimmen. 																	

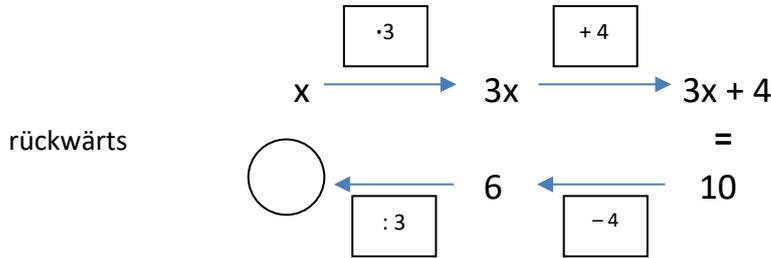


Bestimmen der Lösung einer Gleichung durch Rückwärtsarbeiten

27

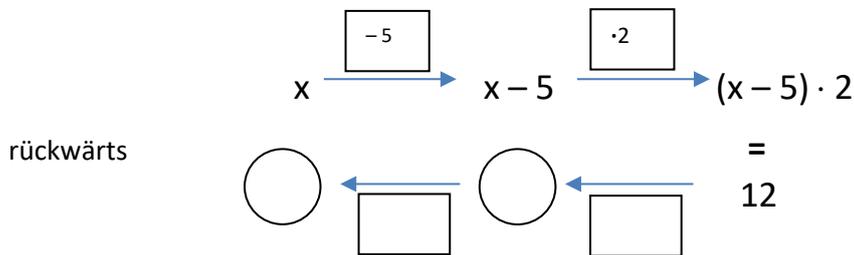
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Die Gleichung $3x + 4 = 10$ soll gelöst werden. Dazu müssen die Rechenschritte, mit denen der Term $3x + 4$ gebildet wurde, rückgängig gemacht werden.



• Ermittle den Wert von x. $x = \underline{\hspace{2cm}}$

• Löse die Gleichung $(x - 5) \cdot 2 = 12$ mithilfe der Darstellung.



Bestimmen der Lösung einer Gleichung durch Rückwärtsarbeiten (Zahlenrätsel)

28

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Leon löst die Zahlenrätsel von Selma.

Selma sagt:

Das Doppelte meiner Zahl ergibt 7.

$$2 \cdot x = 7$$

Ich addiere zu meiner Zahl 7 und erhalte 25.

$$x + 7 = 25$$

Ich subtrahiere 16 von meiner Zahl und erhalte -5.

$$x - 16 = -5$$

Leon überlegt:

Dann ist deine Zahl die Hälfte von 7, also 3,5.

$$x = 7 : 2$$

$$x = 3,5$$

Dann ist deine Zahl um 7 kleiner als 25, also 18.

$$x =$$

$$x =$$

Deine Zahl ist um 16 größer als -5, nämlich 11.

$$x =$$

$$x =$$

- Beschreibe, wie Leon die gesuchte Zahl bestimmt.
- Ergänze dabei die Tabelle.

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen						
Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Rückwärtsarbeiten (Zahlenrätsel)		29						
<p>Selma stellt ein Zahlenrätsel: „Ich addiere zum Doppelten meiner Zahl 5 und erhalte 13.“</p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center; vertical-align: top;"> Selma rechnet „vorwärts“ gedachte Zahl mal 2 plus 5 Ergebnis 13 </td> <td style="width: 10%; text-align: center; vertical-align: middle;"> </td> <td style="width: 50%; text-align: center; vertical-align: top;"> Leon rechnet „rückwärts“ gesuchte Zahl geteilt durch 2 minus 5 Ergebnis 13 </td> </tr> </table> <ul style="list-style-type: none"> • Nutze Leons Lösungsweg und berechne Selmas gedachte Zahl. • Löse das nächste Zahlenrätsel wie im Beispiel oben. Fülle dazu die Tabelle aus. <p>Selma sagt: „Von meiner Zahl subtrahiere ich 4, multipliziere das Ergebnis mit 10 und erhalte 15.“</p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center; vertical-align: top;"> Selma rechnet „vorwärts“ x minus 4 mal 10 Ergebnis 15 </td> <td style="width: 10%; text-align: center; vertical-align: middle;"> </td> <td style="width: 50%; text-align: center; vertical-align: top;"> Leon rechnet „rückwärts“ </td> </tr> </table>			Selma rechnet „vorwärts“ gedachte Zahl mal 2 plus 5 Ergebnis 13		Leon rechnet „rückwärts“ gesuchte Zahl geteilt durch 2 minus 5 Ergebnis 13	Selma rechnet „vorwärts“ x minus 4 mal 10 Ergebnis 15		Leon rechnet „rückwärts“
Selma rechnet „vorwärts“ gedachte Zahl mal 2 plus 5 Ergebnis 13		Leon rechnet „rückwärts“ gesuchte Zahl geteilt durch 2 minus 5 Ergebnis 13						
Selma rechnet „vorwärts“ x minus 4 mal 10 Ergebnis 15		Leon rechnet „rückwärts“ 						

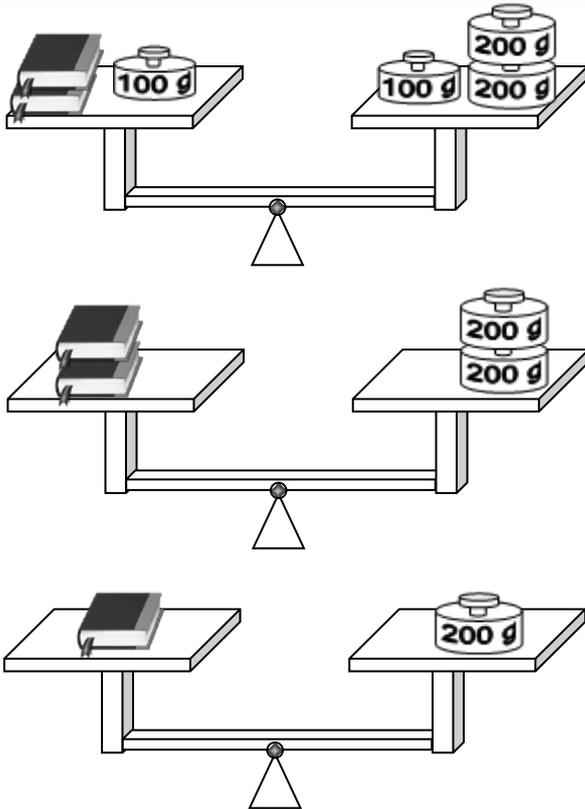
Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Erkennen und erklären von Äquivalenzumformungen (Waage)		30
<p>Auf der Waage liegen 3 Beutel, in denen jeweils gleich viele Kugeln sind. Das kann man durch folgende Gleichung ausdrücken:</p> $3 \cdot x + 2 = 14$ <p>Peter möchte wissen, wie viele Kugeln in jedem Beutel sind. Er nimmt auf beiden Seiten etwas weg. Die Gleichung lautet jetzt:</p> $3 \cdot x = 12$ <ul style="list-style-type: none"> • Beschreibe, was auf der Waage passiert ist. Nenne die passende Rechenoperation. <p>Peter überlegt sich den nächsten Schritt. Er teilt auf beiden Seiten alles durch 3.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Was hat er mit diesem Schritt erreicht? 		



Beschreiben von Äquivalenzumformungen (Waage)

31

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0



Auf der Waage liegen zwei gleich schwere Bücher. Aida möchte wissen, wie schwer ein Buch ist. Sie schreibt:

$$2 \cdot x + 100 = 500$$

- Beschreibe die Veränderung auf der Waage und zeige die Veränderung auch in der Gleichung.

Die dazugehörige Gleichung lautet:

$$2 \cdot x + 100 - 100 = 500 - 100$$

zusammengefasst: $2 \cdot x = 400$.

- Beschreibe die Veränderung auf der Waage und schreibe entsprechende Gleichungen.

zusammengefasst: _____

Bild 23: „3 Bücherwaagen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0



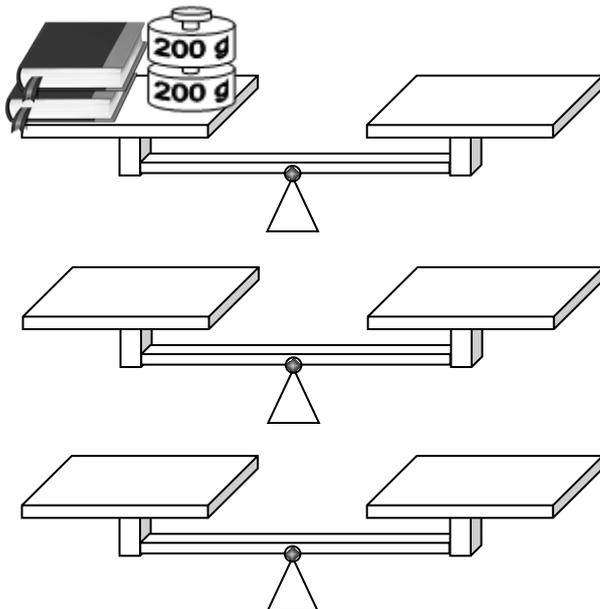
Bestimmen der Lösung einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen (Waage)

32

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Aida löst eine Gleichung:

- Ergänze die drei Waagen passend zu den Lösungsschritten. Benutze dabei nur 100-g- und 200-g-Massestücke.
- Beschreibe für jeden Schritt, was auf beiden Seiten gemacht wird.



$$3 \cdot x + 400 = 700$$

$$3 \cdot x = 300$$

$$x = 100$$

Bild 24: „3 Bücherwaagen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Lösen von Gleichungen mithilfe von Waagebildern (Äquivalenzumformungen)		33
<p>Auf der Waage liegen zwei Beutel, in denen jeweils gleich viele Kugeln sind. Wie viele sind es?</p> <ul style="list-style-type: none"> Gib für jede Waage eine passende Gleichung an. Beschreibe die Veränderungen von Waage zu Waage. <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: flex-start;"> <div style="width: 60%;"> <div style="border: 1px solid black; height: 60px; margin-bottom: 10px;"></div> <div style="border: 1px solid black; height: 60px; margin-bottom: 10px;"></div> <div style="border: 1px solid black; height: 60px;"></div> </div> <div style="width: 35%; text-align: center;"> </div> </div> <p style="margin-top: 10px;">Ergebnis: In jedem Beutel befinden sich ____ Kugeln.</p>		

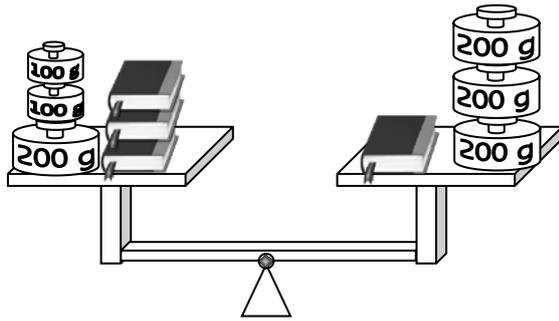
Bild 25: „3 Waagen mit Kugeln“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Erkennen und erklären von Äquivalenzumformungen (Streichhölzer)		34
<p>Das folgende Bild beschreibt eine Gleichung.</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> </div> <p>Luka möchte herausfinden, wie viele Streichhölzer in einer Schachtel sind.</p> <p>Er löst die Gleichung in zwei Schritten und sieht am Ende, wie viele Streichhölzer in einer Schachtel sind.</p> <div style="margin-top: 20px;"> <p>Schritt 1:</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> </div> <p>Schritt 2:</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> </div> </div> <ul style="list-style-type: none"> Erkläre mit den Bildern, wie Luca vorgegangen ist. 		

Bild 26: „Streichhölzer“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformung		35
<p>Selma sagt: „Zu meiner Zahl addiere ich 4, das Ergebnis multipliziere ich mit 10 und erhalte 15.“ Dieses Zahlenrätsel wird durch die Gleichung $(x + 4) \cdot 10 = 15$ beschrieben. Leon löst die Gleichung.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin: 20px 0;"> <div style="text-align: center;"> <p style="color: red; font-weight: bold;">geteilt durch 10</p> <p style="color: blue; font-weight: bold;">minus 4</p> </div> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="text-align: center;"> $(x + 4) \cdot 10 = 15$ $x + 4 = 1,5$ $x = -2,5$ </div> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="text-align: center;"> <p style="color: red; font-weight: bold;">geteilt durch 10</p> <p style="color: blue; font-weight: bold;">minus 4</p> </div> </div> <ul style="list-style-type: none"> Erkläre, warum Leon erst durch 10 teilt und danach 4 subtrahiert. Löse die folgenden Gleichungen. Schreibe so wie im Beispiel oben. <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $6 \cdot x - 10 = 8$ <hr style="width: 50px; margin: 5px auto;"/> <hr style="width: 50px; margin: 5px auto;"/> </div> <div style="text-align: center;"> $(x - 13) : 5 = 4$ <hr style="width: 50px; margin: 5px auto;"/> <hr style="width: 50px; margin: 5px auto;"/> </div> </div>		

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Benutzen einer formalen Schreibweise für die Angabe von Äquivalenzumformungen		36
<p>Leon löst eine Gleichung.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin: 20px 0;"> <div style="text-align: center;"> <p style="color: red; font-weight: bold;">geteilt durch 10</p> <p style="color: blue; font-weight: bold;">minus 4</p> </div> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="text-align: center;"> $(x + 4) \cdot 10 = 15$ $x + 4 = 1,5$ $x = -2,5$ </div> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="text-align: center;"> <p style="color: red; font-weight: bold;">geteilt durch 10</p> <p style="color: blue; font-weight: bold;">minus 4</p> </div> </div> <p>Dies schreibt man in dieser Form:</p> <div style="display: flex; justify-content: center; margin: 20px 0;"> $(x + 4) \cdot 10 = 15$: 10 </div> <div style="display: flex; justify-content: center; margin: 5px 0;"> $x + 4 = 1,5$ - 4 </div> <div style="display: flex; justify-content: center; margin: 5px 0;"> $x = -2,5$ </div> <ul style="list-style-type: none"> Löse die folgenden Gleichungen. Schreibe so wie es oben dargestellt wird. <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $6 \cdot x - 10 = 8$ + 10 </div> <div style="text-align: center;"> $(x - 13) : 5 = 4$ ____ </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <hr style="width: 50px; margin: 5px auto;"/> ____ </div> <div style="text-align: center;"> <hr style="width: 50px; margin: 5px auto;"/> ____ </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <hr style="width: 50px; margin: 5px auto;"/> ____ </div> <div style="text-align: center;"> <hr style="width: 50px; margin: 5px auto;"/> ____ </div> </div>		



Zu diesem Bild wurde eine Gleichung aufgestellt. x steht für die Masse eines Buches. Ergänze die Lösungsschritte.

$$400 + 3x = 600 + x \quad | -x$$

$$\underline{400 + 3x - x = 600 + x - x}$$

$$400 + 2x = 600 \quad | \underline{\hspace{2cm}}$$

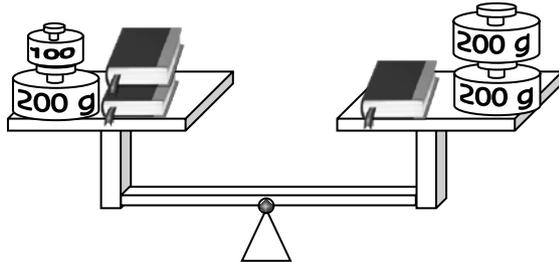
$$\underline{\hspace{2cm}}$$

$$2x = 200 \quad | \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{x = \hspace{2cm}}$$

Bild 27: „3 Bücherwaagen“, LISUM, CC-BY-SA 4.0



Mario hat zu der Abbildung eine Gleichung aufgestellt und angefangen, sie zu lösen.

- Hilf ihm, indem du die leeren Felder passend ausfüllst.

Schritt 1: $300 + 2x = x + 400 \quad | \underline{\hspace{2cm}}$

$$300 + 2x \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Schritt 2: $300 + x = 400 \quad | \underline{\hspace{2cm}}$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

Schritt 3: $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Bild 28: „3 Bücherwaage“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen								
Ergänzen von Äquivalenzumformungsschritten (Streichhölzer)		39								
<div style="text-align: center; margin-bottom: 20px;"> </div> <p>Hugo löst die obige Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen.</p> <ul style="list-style-type: none"> Ergänze jeweils die Äquivalenzumformung und beschreibe anhand der Schachteln und Hölzer, was in jedem Schritt gemacht wird: <div style="margin-left: 100px; margin-top: 20px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 20px;">$3x + 5 = x + 13$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> _____</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 20px;">$2x + 5 = 13$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> _____</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 20px;">$2x = 8$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> _____</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 20px;">$x = 4$</td> <td></td> </tr> </table> </div>			$3x + 5 = x + 13$	_____	$2x + 5 = 13$	_____	$2x = 8$	_____	$x = 4$	
$3x + 5 = x + 13$	_____									
$2x + 5 = 13$	_____									
$2x = 8$	_____									
$x = 4$										

Bild 29: „Streichhölzer“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen		40
<p>Das Bild beschreibt eine Gleichung. Die Anzahl der Hölzer in einer Schachtel ist unbekannt. Jede Schachtel enthält die gleiche Anzahl Hölzer.</p> <div style="text-align: center; margin-bottom: 20px;"> </div> <ul style="list-style-type: none"> Schreibe die passende Gleichung auf. Löse die Gleichung in mehreren Schritten. Du kannst die Lösungsschritte auch zeichnen. 		

Bild 30: „Streichhölzer“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen												
Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen		41												
Luisa löst die oben dargestellte Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen.														
<ul style="list-style-type: none"> • Ergänze. 														
<table style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">$4x + 5 = 2x + 11$</td> <td style="padding: 0 10px;"> </td> <td style="padding: 0 10px;">$-2x$</td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 100px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 100px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 100px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 10px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; width: 100px;"></td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="padding-top: 10px;">$x =$ _____</td> </tr> </table>			$4x + 5 = 2x + 11$		$-2x$							$x =$ _____		
$4x + 5 = 2x + 11$		$-2x$												
$x =$ _____														

Bild 31: „Streichhölzer“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen		42
Tom hat zu obiger Situation folgende Gleichung aufgestellt:		
$3x + 5 = x + 7$		
<ul style="list-style-type: none"> • Bestimme mithilfe von Äquivalenzumformungen die Anzahl der Streichhölzer in jeder Schachtel. 		

Bild 32: „Streichhölzer“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0

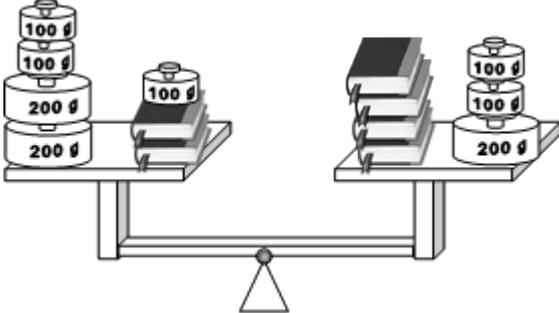
Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Vergleichen von Lösungswegen mit unterschiedlichen Umformungsschritten (Waage)		43
		
Svenja und Jakob haben jeweils eine Gleichung zu der obigen Situation aufgestellt.		
<p style="text-align: center;"><i>Svenja rechnet:</i></p> $700 + 2 \cdot x = 4 \cdot x + 400 \quad - 400$ $300 + 2 \cdot x = 4 \cdot x \quad - 2 \cdot x$ $300 = 2 \cdot x \quad : 2$ $\underline{\underline{150 = x}}$	<p style="text-align: center;"><i>Jakob rechnet:</i></p> $700 + 2 \cdot x = 4 \cdot x + 400 \quad : 2$ $350 + x = 2 \cdot x + 200 \quad - 200$ $150 + x = 2 \cdot x \quad - x$ $\underline{\underline{150 = x}}$	
<ul style="list-style-type: none"> • Erkläre beide Lösungswege am Waagebild. • Wie hättest du gerechnet? Begründe. 		

Bild 33: „3 Bücherwaage“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen (Spielzeug)		44
		
Florentine darf sich von ihrem Taschengeld Spielzeugtiere kaufen. Sie bezahlt 66 €. Jedes Tier kostet 8 €. Der Stall für die Tiere kostet 10 €. In der Gleichung $66 = 8 \cdot x + 10$ steht x für die Anzahl der gekauften Tiere.		
<ul style="list-style-type: none"> • Berechne mithilfe von Äquivalenzumformungen die Anzahl der Tiere, die Florentine gekauft hat. 		

Bild 34: „Spielzeugtiere 2“, M.Reblin für LISUM, CC-BY-SA 4.0



Bestimmen der Lösungsmenge einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen

45



Paul verkauft auf dem Trödelmarkt seine Spielzeugtiere. Jedes Tier verkauft er für 3 €. Die Miete für den Verkaufsstand beträgt 15 € für den ganzen Tag. Paul stellt eine Rechnung auf, wie die Anzahl der verkauften Tiere (x) und der Gewinn (G) zusammenhängen.

$$G = 3 \cdot x - 15 \quad | +15$$

$$G + 15 = 3 \cdot x \quad | :3$$

$$G + 5 = x$$

- Erkläre, welchen Fehler Paul gemacht hat. Gib die richtige Lösung an.

Bild 35: „Spielzeugtiere 3“, LISUM, CC-BY-SA 4.0



Bestimmen von mehrelementigen Lösungsmengen von Gleichungen (Fruchtkörbe)

46



In einem Korb befinden sich Erdbeeren und in vier gleich schweren Körben befinden sich Blaubeeren. Zusammen wiegt der Inhalt der Körbe 20 kg.

Die Gleichung dazu lautet: $x + 4y = 20$

Angenommen, im Korb sind 8 kg Erdbeeren. Die zugehörige Gleichung lautet dann: $8 + 4 \cdot y = 20$.

- Löse diese Gleichung. Ergänze den Antwortsatz:

Wenn ein Erdbeerkorb 8 kg wiegt, dann muss ein Heidelbeerkorb _____ wiegen.

Angenommen ein Korb Erdbeeren wiegt 4 kg.

- Stelle die passende Gleichung auf und löse sie.
Formuliere einen Antwortsatz.
- Finde mindestens eine weitere Lösung.

Bild 36: „Obstkörbe“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Bestimmen von mehrelementigen Lösungsmengen von Gleichungen (Fruchtkörbe)		47
<p>In einem Korb befinden sich Erdbeeren und in vier gleich schweren Körben befinden sich Blaubeeren. Zusammen wiegt der Inhalt der Körbe 24 kg. Die Gleichung dazu lautet: $x + 4 \cdot y = 24$</p> <p>a) Die Erdbeeren wiegen 9 kg. Finde heraus, wie viel ein Korb Blaubeeren wiegt, indem du die Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen löst.</p> <p>b) Ein Korb Blaubeeren wiegt 3 kg. Finde heraus, wie viel dann der Korb mit Erdbeeren wiegt, indem du die zugehörige Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen löst.</p>		

Bild 37: „Obstkörbe“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen																																								
Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungssystemen durch systematisches Probieren		48																																								
<p>Jolene kauft einen Korb Erdbeeren und einen Korb Blaubeeren. Sie bezahlt 11 €. Minh Anh kauft drei Körbe Erdbeeren und nur einen Korb Blaubeeren. Sie bezahlt 25 €. Das zugehörige Gleichungssystem lautet:</p> <p style="margin-left: 40px;">I. $e + b = 11$ II. $3e + b = 25$</p> <p>1. Finde heraus, wie viel ein einzelner Korb Erdbeeren und ein einzelner Korb Blaubeeren kosten. Finde hierzu verschiedene Wertepaare (e, b), die für Gleichung I. eine Lösung sind (✓). Prüfe dann jeweils, ob dieses Wertepaar auch eine Lösung für Gleichung II. ist. Beispiel: $e = 1$ und $b = 10$ löst I. (✓), aber nicht II. (–). Ergänze die folgende Tabelle:</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tr> <td style="padding: 5px;">e</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;">7</td> <td style="padding: 5px;">8</td> <td style="padding: 5px;">9</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">b</td> <td colspan="9" style="padding: 5px;">10</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">löst I.</td> <td style="padding: 5px;">✓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">löst II.</td> <td colspan="9" style="padding: 5px;">–</td> </tr> </table> <p style="margin-top: 10px;">Erkläre, woran du in der ausgefüllten Tabelle das richtige Wertepaar erkennst.</p>			e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	b	10									löst I.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	löst II.	–								
e	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																	
b	10																																									
löst I.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓																																	
löst II.	–																																									

Bild 38: „Obstkörbe“, LISUM, CC-BY-SA 4.0

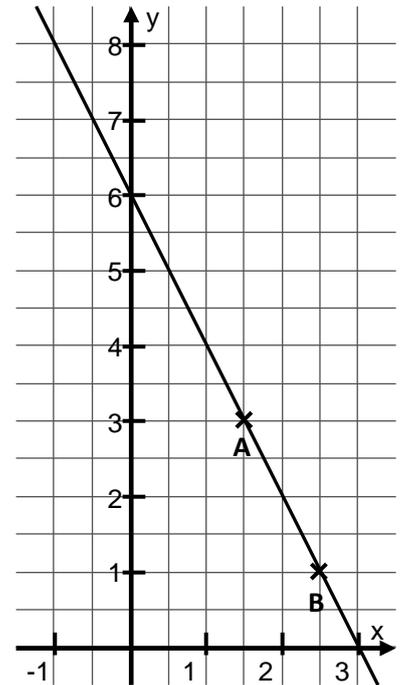


Elisabeth hat die Lösungsmenge der Gleichung $y = 6 - 2x$ graphisch dargestellt.

Alle Punkte $P(x|y)$ auf dieser Geraden sind Teil der Lösungsmenge.

So ist Punkt A $(1,5|3)$ eine mögliche Lösung für die Gleichung.

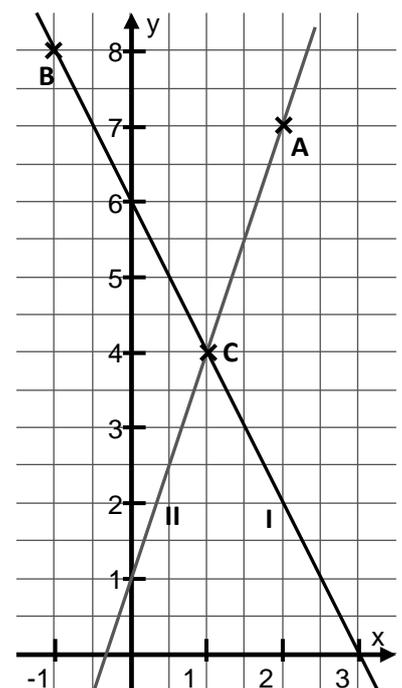
- Prüfe durch Einsetzen in die Gleichung, ob das Zahlenpaar $x = 1,5$ und $y = 3$ eine Lösung ist.
- Gib die Koordinaten des Punktes B an und begründe, weshalb B ebenfalls eine Lösung der Gleichung ist.
- Gib weitere Lösungen der Gleichung an. Markiere sie auf der Geraden.



Olaf hat die Lösungsmengen der Gleichungen

- I. $y = 6 - 2x$ und
- II. $y - 3x = 1$ grafisch dargestellt.

- Gib die Koordinaten $(x|y)$ der Punkte A und B an. Zeige durch Einsetzen, dass die Koordinaten dieser Punkte Lösung jeweils einer Gleichung sind.
- Gib die Koordinaten des Punktes C an. Zeige durch Einsetzen der Koordinaten, dass dieser Punkt Lösung beider Gleichungen ist.



Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Erkennen des Schnittpunktes zweier Geraden als Lösung eines Gleichungssystems		51
<p>Sven hat das folgende Gleichungssystem grafisch dargestellt:</p> <p>I. $y - x = 2$</p> <p>II. $y = 2x - 1$</p> <p>Es gibt einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt.</p> <ul style="list-style-type: none"> Gib die Koordinaten dieses Punktes an. Erkläre die Bedeutung der Koordinaten dieses Punktes für das Gleichungssystem. Weise die Bedeutung durch Rechnung nach. 		

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen												
Grafisches Lösen von Gleichungssystemen		52												
<p>Die Lösung eines linearen Gleichungssystems lässt sich bestimmen, indem man zu jeder Gleichung eine Gerade zeichnet und deren Schnittpunkt abliest.</p> <p>Um eine Gerade eindeutig zeichnen zu können, benötigt man zwei Punkte.</p> <p>Diese kann man z. B. mithilfe einer kleinen Wertetabelle bestimmen.</p> <p>Das folgende Gleichungssystem soll gelöst werden:</p> <p>I. $y + x = 5$</p> <p>II. $y = 2x - 1$</p>														
<p>I</p> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td>0</td><td>4</td></tr> <tr><td>y</td><td>5</td><td></td></tr> </table>	x	0	4	y	5		<p>II</p> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>x</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>y</td><td></td><td></td></tr> </table>	x			y			
x	0	4												
y	5													
x														
y														
<ul style="list-style-type: none"> Fülle die Wertetabellen aus und übertrage die Punkte ins Koordinatensystem. Zeichne zu jeder Gleichung eine Gerade. Ermittle mithilfe der graphischen Darstellung die Lösung $(x y)$ des Gleichungssystems. 														



Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

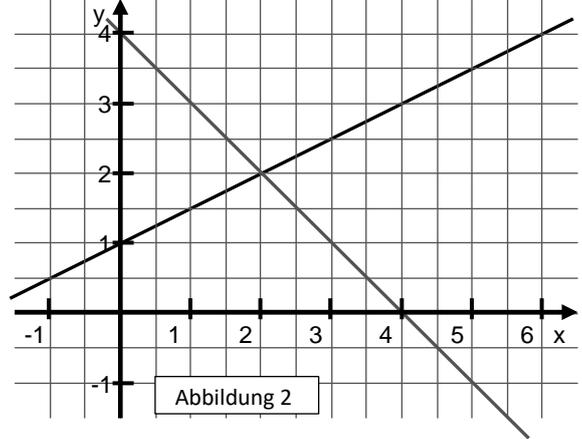
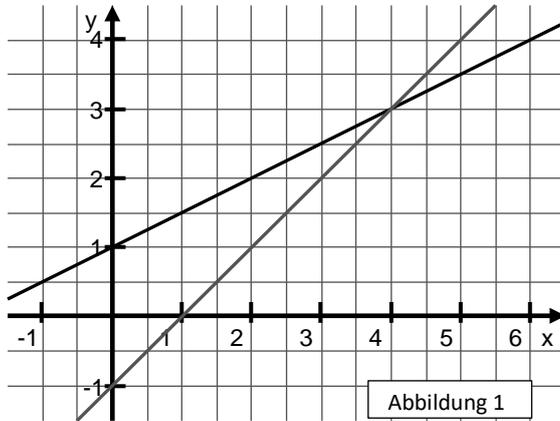
Gegeben sind 3 Gleichungssysteme (A, B und C).

A | $y = 0,5x + 1$
II $x = y + 1$

B | $y = 2x - 1$
II $y - x = 3$

C | $y = 0,5x + 1$
II $y + x = 4$

Zwei dieser Gleichungssysteme sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.



- Ordne den Abbildungen jeweils ein Gleichungssystem zu.
- Gib die Lösung dieser beiden Gleichungssysteme an.
- Stelle das dritte Gleichungssystem grafisch dar und lies dessen Lösung ab.



Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0



Jolene kauft einen Korb Erdbeeren und einen Korb Blaubeeren. Sie bezahlt 11 €.
Minh Anh kauft drei Körbe Erdbeeren und nur einen Korb Blaubeeren. Sie bezahlt 25 €.
Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & e + b = 11 \\ \text{II.} \quad & 3e + b = 25 \end{aligned}$$

Jolene möchte das rechnerisch lösen.

Sie stellt die erste Gleichung nach e um: $e = 11 - b$

Nun setzt sie statt e den Term $11 - b$ in die zweite Gleichung ein: $3 \cdot (11 - b) + b = 25$.

- Begründe, weshalb Jolene statt e den Term $11 - b$ in die zweite Gleichung einsetzen darf.
- Erkläre den Vorteil, den die neue Gleichung $3 \cdot (11 - b) + b = 25$ bietet.
- Löse die neue Gleichung.
- Berechne dann auch e .

Dieses Vorgehen nennt man **Einsetzungsverfahren**.

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Sortieren von Lösungsschritten zur Bestimmung der Lösungsmenge von Gleichungssystemen		55
<p>Eine Möglichkeit, ein Gleichungssystem rechnerisch zu lösen, bietet das Einsetzungsverfahren.</p> <p>Das folgende Gleichungssystem soll gelöst werden. Dabei ist e die Masse eines Erdbeerkorbes und b die Masse eines Blaubeerkorbs (in Gramm).</p> <p style="text-align: center;">I. $e + 3b = 1100$ II. $3e + b = 1700$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Binge die Lösungsschritte zum Lösen des Gleichungssystems mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens in die richtige Reihenfolge: <div style="display: flex; flex-wrap: wrap; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%; margin-bottom: 10px;"> Antwortsatz schreiben: Ein Korb Erdbeeren wiegt 500 g und ein Korb Blaubeeren 200 g. </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 20%; margin-bottom: 10px;"> b bestimmen: $b = 200$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%; margin-bottom: 10px; transform: rotate(-10deg);"> I. nach e umstellen: $e = 1100 - 3 \cdot b$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%; margin-bottom: 10px; transform: rotate(-15deg);"> Klammern auflösen: $3300 - 9 \cdot b + b = 1700$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%; margin-bottom: 10px; transform: rotate(-10deg);"> e in II. einsetzen: $3 \cdot (1100 - 3 \cdot b) + b = 1700$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%; margin-bottom: 10px;"> b in I. einsetzen: $e = 1100 - 3 \cdot 200 = 500$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%; margin-bottom: 10px;"> Umstellen und zusammenfassen: $1600 = 8 \cdot b$ </div> </div>		

Gleichungen und Funktionen Sekundarstufe I		Idee der Gleichungen Lösen von Gleichungen
Bestimmen der Lösungsmenge eines Gleichungssystems mit dem Einsetzungsverfahren		56
<p>Abdullah und Josi durften sich im Schwimmbad Schoko-Lollys und Brausebrocken kaufen. Abdullah kauft einen Schoko-Lolly und 5 Brausebrocken für 3,20 €. Josi besorgt sich 3 Schoko-Lollys und 2 Brausebrocken und bezahlt 3,10 €.</p> <p>Das zugehörige Gleichungssystem lautet: I. $s + 5b = 3,20$ II. $3s + 2b = 3,10$</p> <p>Bestimme den Preis für einen einzelnen Schoko-Lolly und einen einzelnen Brausebrocken, indem du die Lücken bei folgendem Lösungsweg ergänzt:</p> <p>Schritt 1: Gleichung I nach s umstellen: $s = 3,20 - \underline{\hspace{2cm}}$</p> <p>Schritt 2: Die Lösung für s in Gleichung II. einsetzen: $3 \cdot (\underline{\hspace{2cm}}) + 2 \cdot b = 3,10$</p> <p>Schritt 3: Ausmultiplizieren: $3 \cdot \underline{\hspace{2cm}} - 3 \cdot 5 \cdot b + 2 \cdot b = 3,10$</p> <p>Schritt 4: Zusammenfassen: $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad - 9,60$ $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad : \underline{\hspace{2cm}}$</p> <p>Damit ist $b = \underline{\hspace{2cm}}$.</p> <p>Schritt 5: b in die nach s umgestellte Gleichung einsetzen: $s = 3,20 - \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$.</p>		