Darum geht es:

Hilbert verursachte vor über 100 Jahren mit den „Grundlagen der Geometrie“ einen Umbruch in der mathematischen Sichtweise auf Geometrie: Anstatt, wie Euklid, die Objekte der Geometrie – also Punkte, Geraden, Ebenen – inhaltlich zu beschreiben, beschränkte er sich auf die Schaffung eines Axiomensystems, also einer Beschreibung, wie Objekte sich zueinander verhalten müssen, um als „Geometrie“ zu gelten. Damit rückten die Beziehungen zwischen den Objekten und ihre Eigenschaften in den Fokus der Aufmerksamkeit.

Die Objekte mit ihren Eigenschaften und die Relationen zwischen diesen Eigenschaften und den Objekten selbst können tatsächlich nur gemeinsam in den Blick genommen werden, so dass der Fokus der Förderaktivitäten in diesem Abschnitt auf den Eigenschaften, Beziehungen, Invarianzen und Abbildungen liegt. Der mathematische Zugang zu Objekten und Begriffen nutzt die Beschreibung von Beziehungen: Beispielsweise wird Ähnlichkeit über die Beziehungen der Seitenlängen und der Winkel in der Original- und der Bildfigur erschlossen. So wird die euklidische Geometrie dadurch charakterisiert, dass Verschiebungen, Rotationen und Spiegelungen die wesentlichen Eigenschaften von geometrischen Objekten nicht ändern, und somit Form (Winkel) und Größe (Abstand) die beiden relevanten Messgrößen von geometrischen Objekten sind.

Im Konzeptbild sind die Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen insbesondere mit der zweiten und dritten Säule verbunden. Die zweite Säule (Strukturierung des Raumes und praktischer Nutzen) wird beispielsweise durch die Anwendungen des Satzes von Pythagoras angesprochen; die dritte (Vermittlung von Freude und Entwicklung von Selbstvertrauen) mit dem Aspekt Ästhetik von Formen und Ordnungen findet sich u. a. bei den Aufgaben zur Ähnlichkeit wieder, die mit Erkundungen zum *Haus vom Nikolaus* beginnen. Hier werden Aktivitäten angeboten, mit denen die Schülerinnen und Schüler erforschen können, welche Eigenschaften von geometrischen Objekten sich bei Verschiebungen, Spiegelungen, Vergrößerungen oder Verkleinerungen wie verändern, und welche invariant bleiben. So können sie auch „Erfahrungen zu Eigenschaften von geometrischen Objekten, Prozessen und Beziehungen“ (MBJS, S. 9) sammeln.

(siehe auch Didaktischer Kommentar von Prof. Kortenkamp und Prof. Kuzle in diesem Material)

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Übersicht zu den Förderaufgaben

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben „Koordinatisierung und Eigenschaften / Beziehungen / Abbildungen“, Stufe D, E, F, G: Aufgabe 2

1. Ordnen von Figuren im „Haus des Nikolaus“
2. Messen von Längen im „Haus des Nikolaus“
3. Messen von Winkeln im „Haus des Nikolaus“
4. Erzeugen eines Bildes durch Vergrößern des Originals
5. Erzeugen eines Bildes durch Verkleinern des Originals
6. Bestimmen des Maßstabs bei Vergrößerungen
7. Bestimmen des Maßstabs bei Verkleinerungen
8. Unterscheiden von Vergrößerung oder Verkleinerung
9. Beurteilen von Maßstäblichkeit
10. Bestimmen des Ähnlichkeitsfaktors
11. Beurteilen von Ähnlichkeit durch Messen von Winkeln
12. Bestimmen des Flächeninhalts bei maßstäblich vergrößerten Rechtecken
13. Bestimmen des Flächeninhalts bei maßstäblich vergrößerten Parallelogrammen
14. Bestimmen des Flächeninhalts bei maßstäblich vergrößerten Dreiecken
15. Bestimmen des Volumens bei maßstäblich vergrößerten Körpern
16. Bestimmen des Flächeninhalts von Kreisen durch Vergrößern des Durchmessers
17. Untersuchen des Volumens eines Würfels mit dreifacher Kantenlänge
18. Finden von Achsensymmetrie

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben „Koordinatisierung und Eigenschaften / Beziehungen / Abbildungen“, Stufe D, E, F, G: Aufgabe 3

19. Entdecken von Quadraten an Dreiecksseiten
20. Untersuchen von Flächenquadraten an besonderen Dreiecken
21. Verallgemeinern der Aussage: Satz des Pythagoras
22. Verallgemeinern des Satzes des Pythagoras (GeoGebra-Datei)
23. Zeichnen von Quadraten über Dreiecksseiten
24. Formulieren des Satzes des Pythagoras
25. Überprüfen von Aussagen zum Satz des Pythagoras
26. Bestimmen von Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks
27. Ermitteln von Seitenlängen mithilfe des Satzes des Pythagoras
28. Aufstellen einer Gleichung zum Satz des Pythagoras
29. Variieren der Seitenbezeichnungen
30. Berechnen von Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken
31. Erkennen von rechtwinkligen Dreiecken in der Umwelt
32. Bestimmen von Streckenlängen mithilfe des Satzes des Pythagoras

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Übersicht zu den Förderaufgaben

Förderschritte zu den Diagnoseaufgaben „Koordinatisierung und Eigenschaften / Beziehungen / Abbildungen“,
Stufe D, E, F, G: Aufgabe 3 (Fortsetzung)

33. Überprüfen der Umkehrung des Satzes des Pythagoras
34. Verwenden der Umkehrung des Satzes des Pythagoras
35. Berechnen einer Streckenlänge im besonderen Dreieck
36. Berechnen von Streckenlängen im Koordinatensystem (I)
37. Berechnen von Streckenlängen im Koordinatensystem (II)
38. Berechnen von Streckenlängen in Figuren (I)
39. Berechnen von Streckenlängen in Figuren (II)
40. Finden von rechtwinkligen Dreiecken in einem Würfel
41. Finden von rechtwinkligen Dreiecken in einer Pyramide
42. Erkennen von Ankathete und Gegenkathete (1)
43. Erkennen von Ankathete und Gegenkathete (2)
44. Erkennen von Ankathete und Gegenkathete (3)
45. Berechnen des Verhältnisses von Gegenkathete und Hypotenuse
46. Berechnen des Verhältnisses von Gegenkathete und Hypotenuse bei größer werdendem Winkel
47. Definition des Sinus
48. Berechnen des Sinuswertes (1)
49. Berechnen des Sinuswertes (2)
50. Berechnen des Winkels mithilfe des Sinus

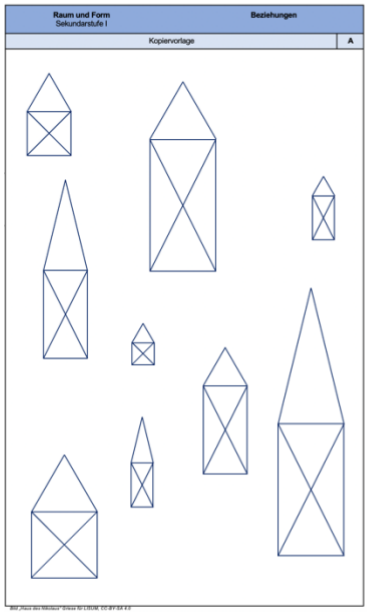
A – G Kopiervorlagen

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Ordnen von Figuren im „Haus des Nikolaus“ **1**

***Material:** Kopiervorlage A*

- Finde zu Figur A solche, die durch Vergrößerung oder Verkleinerung von A entstanden sind. Markiere sie alle mit derselben Farbe.
- Finde weitere Figuren, die durch Vergrößerung oder Verkleinerung zueinander gehören.
- Begründe, worauf du geschaut hast, als du die Figuren geordnet hast.

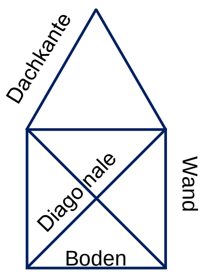


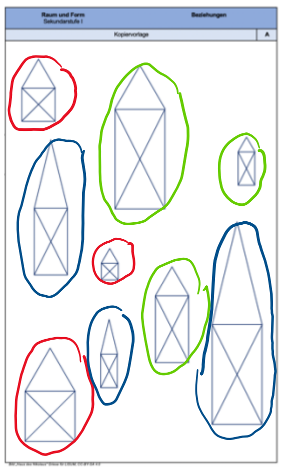
Kopiervorlage A

Messen von Längen im „Haus des Nikolaus“ **2**

***Material**: Kopiervorlage A (Figuren markiert), Geodreieck*

- Die auseinander entstandenen Figuren (Karte 1) sind in Gruppen eingeteilt.
- Miss bei allen Häusern einer Gruppe (z. B. der roten), wie lang die Linien für Boden, Wand, Dachkante und Diagonale sind.





Kopiervorlage A

- Vergleiche immer zwei Häuser deiner Gruppe und vervollständige die Sätze wie im Beispiel.

***Beispiel**:* Wenn die Länge des Bodens verdoppelt wurde, dann wurde auch die Länge der Diagonalen verdoppelt.

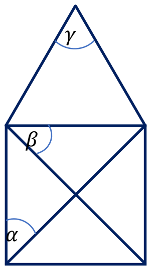
- ○ Wenn die Länge des Bodens verdreifacht wurde, dann …
- ○ Wenn die Länge der Dachkante halbiert wurde, dann …
- ○ Wenn die Länge der Wand …
- ○ Wenn die Länge der Diagonale …

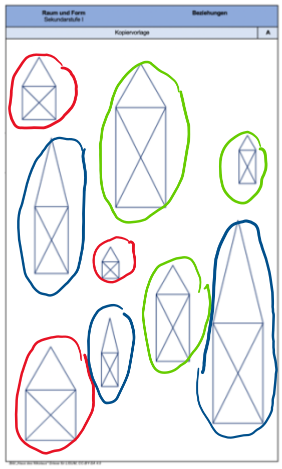
Raum und Form / Messen Sekundarstufe I	**Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen**

Messen von Winkeln im „Haus des Nikolaus“	**3**

Material: *Kopiervorlage A (Figuren markiert), Geodreieck*

- Die auseinander entstandenen Figuren (Karte 1) sind in Gruppen eingeteilt.
- Miss bei allen Häusern einer Gruppe (z. B. der roten), wie groß die Winkel α, β und γ sind.




Kopiervorlage A

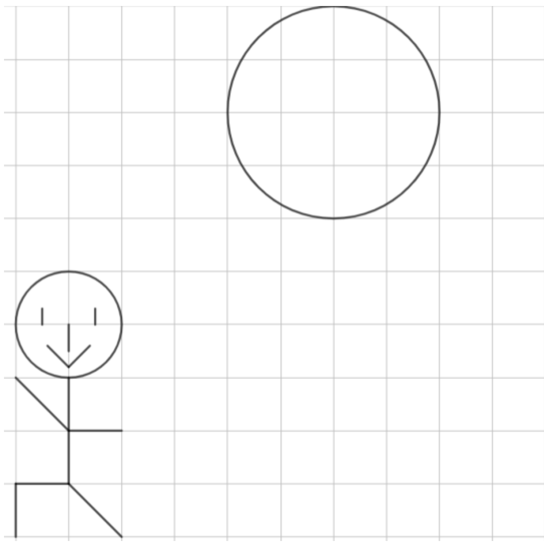
- Vergleiche die Größe dieser Winkel. Beschreibe deine Beobachtungen.
- Untersuche auch die Winkel in den anderen Häusergruppen.

Raum und Form Sekundarstufe I	**Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen**

Erzeugen eines Bildes durch Vergrößern des Originals	**4**

Wenn man Figuren z. B. verschiebt, spiegelt oder vergrößert, dann heißt die ursprüngliche Figur „Original“ oder „Originalfigur“. Die veränderte Figur nennt man „Bild“ oder „Bildfigur“.

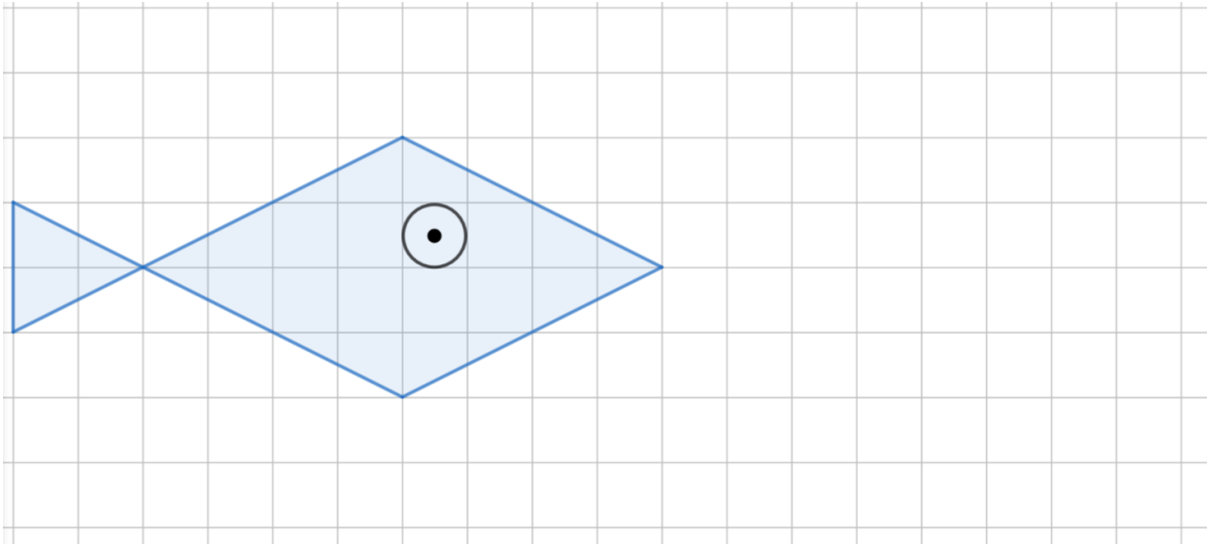
- Verändere das Original so, dass ein doppelt so großes Strichmännchen entsteht. Der Kopf der Bildfigur ist schon vorgegeben.



Erzeugen eines Bildes durch Verkleinern des Originals **5**

Das Bild kann auch *kleiner* sein als das Original.

- Zeichne einen zweiten Fisch, der halb so groß ist wie die Originalfigur. Orientiere dich dabei an dem Raster.
  Du darfst den Fisch auch in die entgegengesetzte Richtung schwimmen lassen.

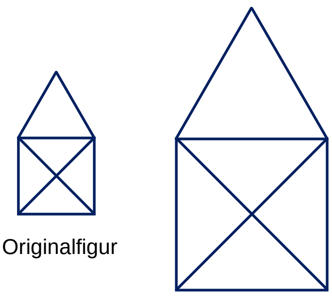


Bestimmen des Maßstabs bei Vergrößerungen **6**

Wenn eine Figur so vergrößert wurde, dass alle Längen verdoppelt wurden, nennt man dies „Vergrößerung im Maßstab 2:1“ (gesprochen „zwei zu eins“).

„Maßstab 2:1“ bedeutet:

2 cm in der Bildfigur entsprechen 1 cm in der Originalfigur

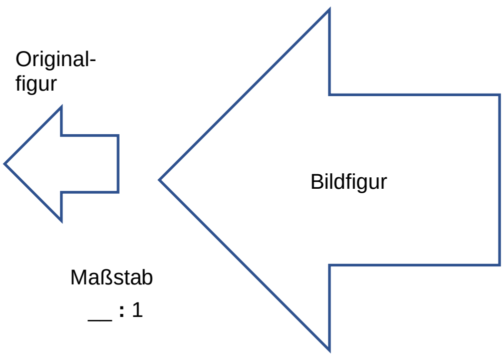


Originalfigur

Bildfigur

- Bestimme, welche Maßstäbe hier verwendet wurden.

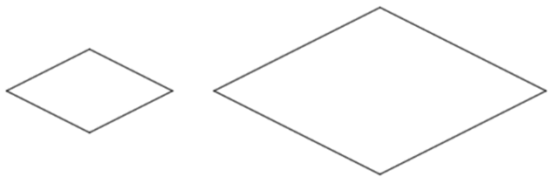
Original-
figur



Maßstab
__ : 1

Original-
figur

Bildfigur



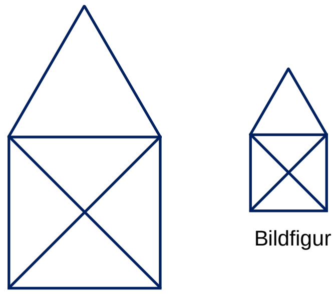
Maßstab
__ : 1

Bestimmen des Maßstabs bei Verkleinerungen | 7

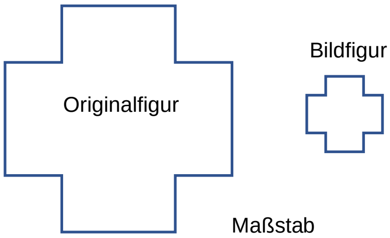
Wenn eine Figur so verkleinert wurde, dass alle Längen halbiert wurden, nennt man dies „Verkleinerung im Maßstab 1:2“ (gesprochen „eins zu zwei“).

„Maßstab 1:2“ bedeutet:

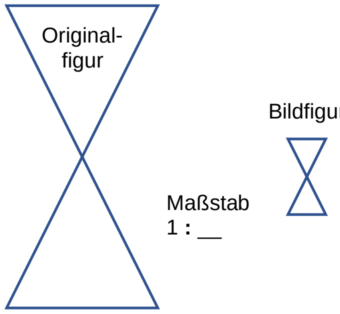
1 cm in der Bildfigur entspricht 2 cm in der Originalfigur.



- Bestimme, welche Maßstäbe hier verwendet wurden.



Maßstab
1 : __



Maßstab
1 : __

Unterscheiden von Vergrößerung oder Verkleinerung | 8

Material: *Kopiervorlage B, Schere*

- Sortiere die Karten: Vergrößerung oder Verkleinerung?

Maßstab 1:3 **A**	Maßstab 1:100 **B**	1 cm in der Originalfigur entspricht 2 cm in der Bildfigur. **1**	10 cm in der Originalfigur entsprechen 2 cm in der Bildfigur. **2**
2 cm in der Originalfigur entsprechen 10 cm in der Bildfigur. **3**	Maßstab 2:1 **C**	1000 cm in der Originalfigur entsprechen 10 cm in der Bildfigur. **4**	Maßstab 10:1 **D**
Maßstab 5:1 **E**	35 cm in der Originalfigur entsprechen 5 cm in der Bildfigur. **5**	Maßstab 1:7 **F**	10 cm in der Originalfigur entsprechen 40 cm in der Bildfigur. **6**
15 cm in der Originalfigur entsprechen 5 cm in der Bildfigur. **7**	Maßstab 1:5 **G**	1 cm in der Originalfigur entspricht 10 cm in der Bildfigur. **8**	Maßstab 4:1 **H**

- Ordne auch die Sätze (Ziffern) den Maßstäben (Buchstaben) zu.

Raum und Form
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Inv. / Abb.
Argumentieren

Beurteilen von Maßstäblichkeit	**9**

Maxi möchte im Biounterricht einen Vortrag über Hamster halten. Auf der Startfolie fügt sie dieses Bild ihres Hamsters ein (links). Nach dem Einfügen des Bildes in die Präsentation sieht das Foto jedoch so aus (rechts):

- Beschreibe die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Bilder.
- Entscheide, ob es sich um eine maßstäbliche Vergrößerung handelt. Begründe.

Bild „Hamster" ©Shutterbug75, 2016. Hamster, pixabay-lizenz. Verfügbar unter: https://pixabay.com/de/photos/tier-kreatur-critter-inl%c3%a4ndisch-1239397, Zugriff am: 6.7.2020

Raum und Form
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

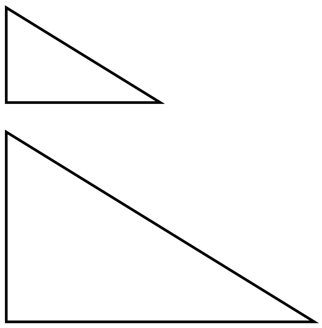
Bestimmen des Ähnlichkeitsfaktors	**10**

Ähnliche Figuren:

Wenn eine Figur durch eine maßstäbliche Vergrößerung oder eine maßstäbliche Verkleinerung aus einer anderen Figur entstanden ist, nennt man die beiden Figuren **ähnlich**.

Ähnlichkeitsfaktor:

Der Ähnlichkeitsfaktor ist der Wert der Division, wenn man im Maßstab das „zu" als „geteilt" auffasst:



Maßstab 2:1 → Ähnlichkeitsfaktor 2
(alle Längen werden mit 2 multipliziert, Vergrößerung)

Maßstab 1:2 → Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$
(alle Längen werden mit $\frac{1}{2}$ multipliziert, Verkleinerung)

- Gib die Ähnlichkeitsfaktoren zu den folgenden Maßstäben an:

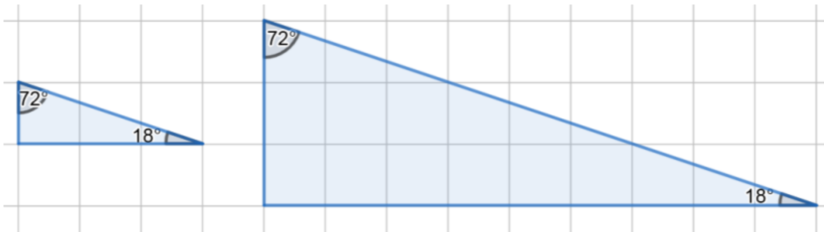
2:1	1:3	10:1	4:1
1:100	5:1	1:5	1:7

Raum und Form / Messen
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

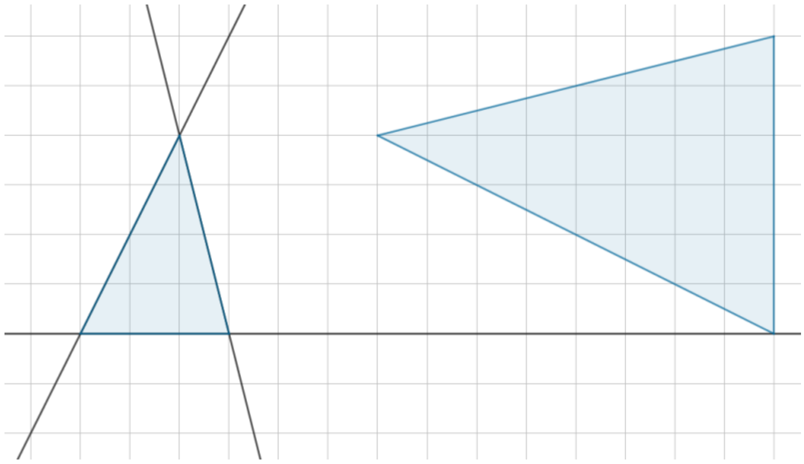
Beurteilen von Ähnlichkeit durch Messen von Winkeln | **11**

In ähnlichen Figuren stimmen nicht nur die Seitenverhältnisse überein, sondern auch die entsprechenden Winkel – ein Beispiel siehst du rechts.



Dreiecke, in denen alle drei Winkel übereinstimmen, sind immer ähnlich zueinander.

- Überprüfe die nebenstehenden Dreiecke auf Ähnlichkeit, indem du die Winkel misst. Bei dem kleineren sind dafür Hilfslinien eingezeichnet.



Erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

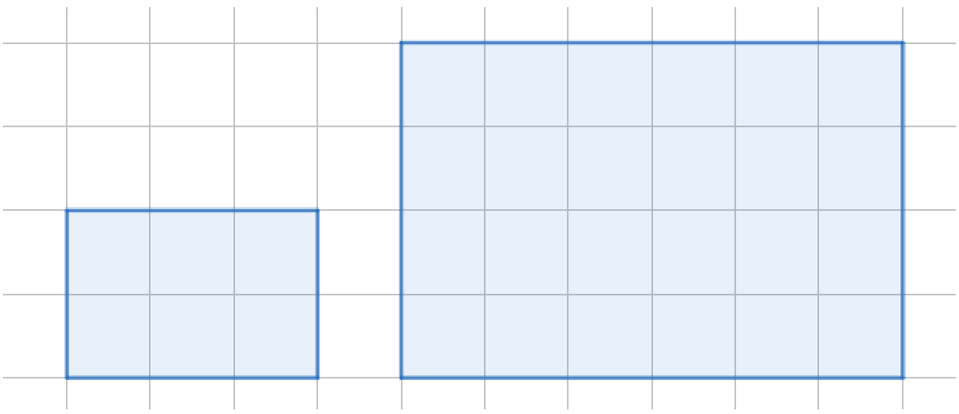
Raum und Form / Messen
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Bestimmen des Flächeninhalts bei maßstäblich vergrößerten Rechtecken | **12**

Tran fragt: „Wenn ich eine Figur im Maßstab 2:1 vergrößere, verdoppelt sich dann auch der Flächeninhalt?“

- Beantworte Trans Frage mithilfe der Abbildung.



- Zeichne ein weiteres Rechteck. Vergrößere es im Maßstab 2:1. Vergleiche auch hier die Flächeninhalte.

- Untersuche, wie sich der Flächeninhalt verändert, wenn ein Rechteck im Maßstab 3:1 vergrößert wird.

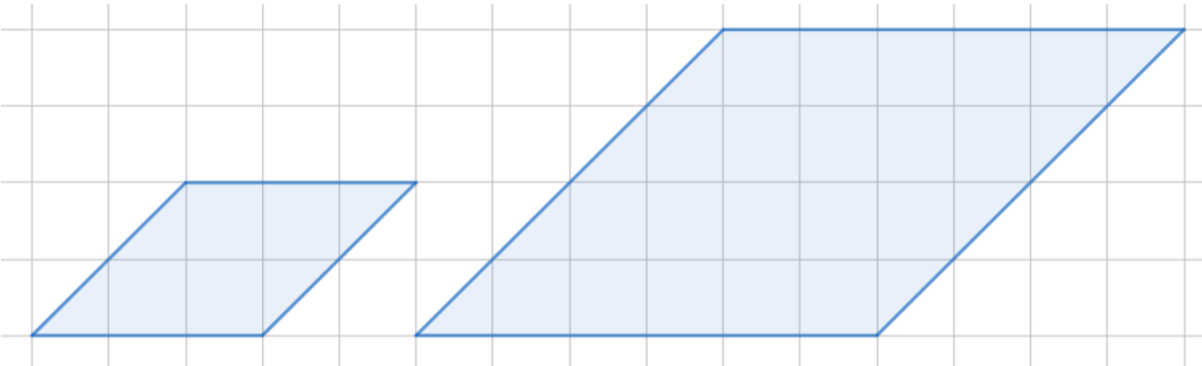
Erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

Raum und Form / Messen Sekundarstufe I	Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen
Bestimmen des Flächeninhalts bei maßstäblich vergrößerten Parallelogrammen	13

Wenn man die Seitenlängen eines Rechtecks verdoppelt, dann hat das Bild einen Flächeninhalt, der viermal so groß ist wie das Original. Aber gilt das auch für andere Vierecke?

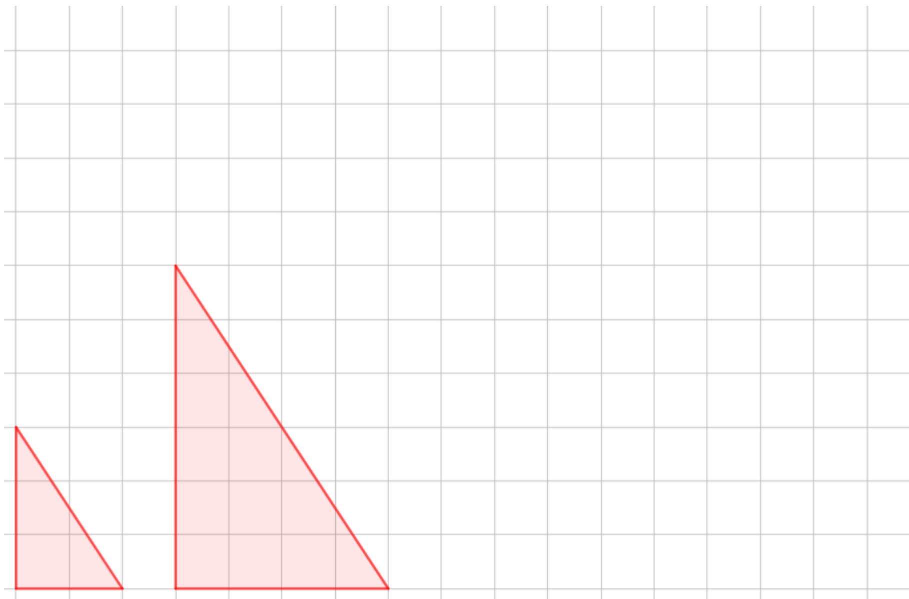
Hier siehst du ein Parallelogramm und seine maßstäbliche Vergrößerung (Maßstab 2:1).

- Bestimme und vergleiche die beiden Flächeninhalte.



Erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

Raum und Form / Messen Sekundarstufe I	Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen
Bestimmen des Flächeninhalts bei maßstäblich vergrößerten Dreiecken	14



Hier siehst du ein rechtwinkliges Dreieck und seine maßstäbliche Vergrößerung.

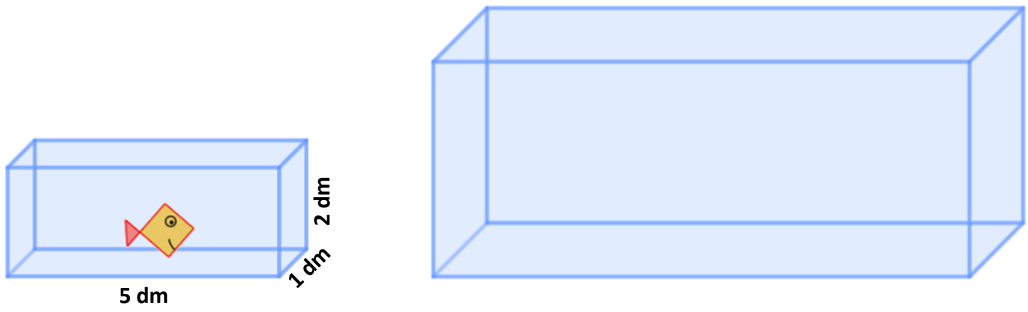
- Gib den Maßstab an.
- Berechne die Flächeninhalte (eine Kästchenlänge ≙ 1 m).
- Untersuche, wie sich der Flächeninhalt verändert, wenn die Seitenlängen des Dreiecks verdreifacht werden.

Erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

Raum und Form
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Berechnen des Volumens bei maßstäblich vergrößerten Körpern — 15



Gritti liebt ihren Fisch und möchte ihm gern ein neues Aquarium bauen, in dem er mehr Platz hat. Um das alte Aquarium zu füllen, braucht sie eine bestimmte Menge Wasser. Das neue Aquarium soll doppelt so lang, doppelt so breit und doppelt so hoch werden. Ihr Vater sagt: „Dann brauchst du auch doppelt so viel Wasser.”

- Gehe davon aus, dass das alte Aquarium die Kantenlängen 1 dm, 2 dm und 5 dm hat. Berechne dann das Volumen des alten sowie des neuen Aquariums.
- Beurteile, ob Grittis Vater recht hat.

Bild „Aquarium", Jeschek für LISUM, erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

Raum und Form
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Veränderung des Flächeninhalts von Kreisen durch Vergrößern des Durchmessers — 16

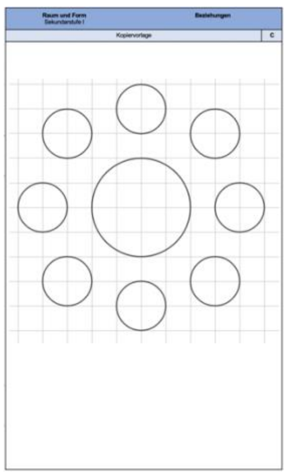
Material: *Kopiervorlage C, Schere*

Angebot
Pizza Funghi (21 cm Durchmesser) 13 €
Pizza Funghi (42 cm Durchmesser) 42 €

Lotta und Juri haben großen Hunger und sehen vor einer Pizzeria dieses Preisschild.

„Das ist ja merkwürdig“, überlegt Juri, „die Pizza, die doppelt so groß ist, kostet mehr als das Doppelte von der kleinen Pizza. Da ist es doch besser, zwei kleine Pizzen zu kaufen.“

- Schätze, wie viele kleine Pizzen in eine große passen.
- Überprüfe deine Schätzung möglichst genau, indem du die kleinen Kreise ausschneidest, zerschneidest und in den großen Kreis legst.

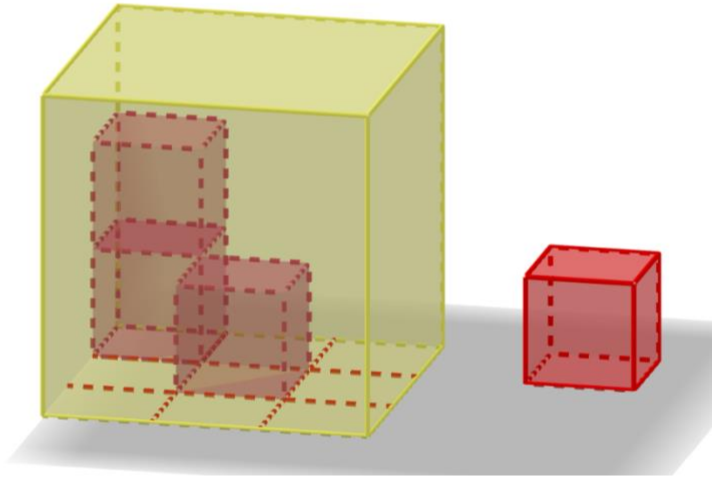


Kopiervorlage C

Untersuchen des Volumens eines Würfels mit dreifacher Kantenlänge

17

***Material**: Holzwürfel*



Pia hat mehrere Bauklötze und eine würfelförmige Kiste. Die Kantenlänge eines Bauklotzes ist 1 dm, die Kantenlänge der Kiste ist dreimal so groß, nämlich 3 dm.

- Überlege, wie viele Bauklötze in die Kiste passen. Begründe.
- Prüfe deine Vermutung durch Abzählen oder Rechnung.
- Überlege, wie sich das Volumen eines Würfels verändert, wenn sich die Kantenlänge verdreifacht.

Bild „Große und kleine Würfel", Jeschek für LISUM, erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Raum und Form
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Finden von Achsensymmetrie

18

Felix ordnet die Großbuchstaben des Alphabets nach Symmetrie: „Der Buchstabe A ist achsensymmetrisch und hat genau eine Symmetrieachse", stellt er fest.

- Zeige die Symmetrieachse bei A.
- Hilf Felix beim Sortieren. Die Kategorien sind: nicht symmetrisch, genau eine Symmetrieachse, mehrere Symmetrieachsen.
- Beurteile, welche Buchstaben eine Symmetrieachse hätten, wenn man sie etwas anders schreiben würde (man muss aber trotzdem noch den Buchstaben erkennen).

- Zusatzauftrag: Auch Flaggen sind häufig symmetrisch – suche im Internet nach Flaggen und zeige, wenn möglich, die Symmetrieachsen.

Bild "Alphabet" Leo Reynolds. Alphabet 20, cc by nc sa 2.0. Verfügbar unter: https://wordpress.org/openverse/image/1571b696-a5db-4494-8d9c-0e5bd942a633, Zugriff am: 6.7.2022, "letter M" Leo Reynolds, 2007. Letter M, cc by nc sa 2.0. Verfügbar unter: https://www.flickr.com/photos/lwr/1460556330, Zugriff am: 6.7.2022

Raum und Form
Sekundarstufe I

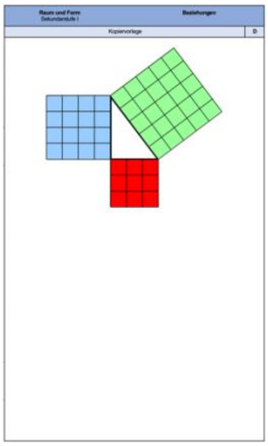
Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Entdecken von Quadraten an Dreiecksseiten | **19**

Material: *Kopiervorlage D, Schere*

Auf der Kopiervorlage D siehst du ein Dreieck, an dessen Seiten Quadrate angelegt wurden.

- Schneide das blaue und das rote Quadrat aus.
- Kannst du die beiden Quadrate so zerlegen, dass sie das grüne Quadrat abdecken?



Kopiervorlage D

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

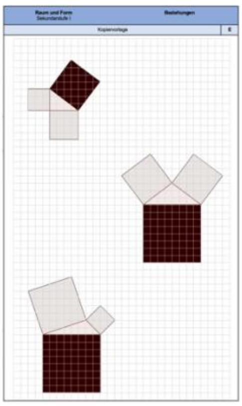
Raum und Form / Messen
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Untersuchen von Flächenquadraten an besonderen Dreiecken | **20**

Material: *Kopiervorlage E, Geodreieck*

- Miss die Seitenlängen der Dreiecke auf der Kopiervorlage.
- Über den Seiten der Dreiecke wurden Quadrate gezeichnet. Berechne mit deinen gemessenen Seitenlängen die Flächeninhalte der Quadrate. Schreibe die Flächeninhalte in die Quadrate.
- Addiere jeweils den Flächeninhalt der beiden kleinen (hellen) Quadrate und vergleiche mit dem Flächeninhalt des großen (dunklen) Quadrates. Was fällt beim rechtwinkligen Dreieck auf?



Kopiervorlage E

Raum und Form
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Inv. / Abb.
Argumentieren

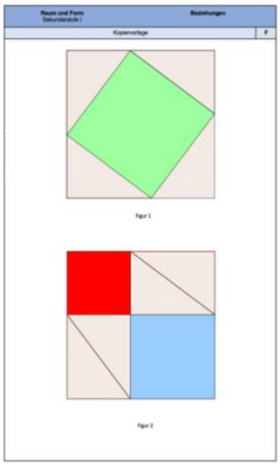
Verallgemeinern der Aussage: Satz des Pythagoras | **21**

Material: *Kopiervorlage F, Schere*

- Schneide die Figur 2 an den Außenlinien aus und lege sie auf Figur 1. Erkläre, warum es sich um dasselbe Quadrat handelt.
- Beschreibe, aus welchen Formen sich die beiden Figuren zusammensetzen.
- Zerschneide Figur 2 und vergleiche die Dreiecke der beiden Figuren miteinander. Was stellst du fest?
- Lege die Figur 2 wieder zusammen.
- Erkläre, warum die Flächen des blauen und des roten Quadrates zusammen genau so groß sein müssen wie die Fläche des grünen Quadrates.
- Nimm dir eines der Dreiecke. Beschreibe, um was für ein besonderes Dreieck es sich handelt. Benenne die Seiten mit den Fachbegriffen.
- Erkläre, wie die Seitenlängen des Dreiecks mit den Seitenlängen der drei Quadrate zusammenhängen.

Wir fassen zusammen:

> *In diesem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten genauso groß wie der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse (**Satz des Pythagoras**).*



Kopiervorlage F

Raum und Form
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Inv. / Abb.
Argumentieren

Verallgemeinern des Satzes des Pythagoras (GeoGebra-Datei) | **22**

- Öffne die Datei „Pythagoras_Beweis.ggb“.
  https://www.geogebra.org/classic/n26rumkv
- Bewege den Punkt C. Beschreibe, was sich verändert.
- Beschreibe, wie die drei Figuren zusammenhängen.
- Erkläre, warum man schlussfolgern kann, dass der Satz des Pythagoras nicht nur für bestimmte rechtwinklige Dreiecke gilt, sondern für **alle** rechtwinkligen Dreiecke. (Was ist am Dreieck verallgemeinert worden?)

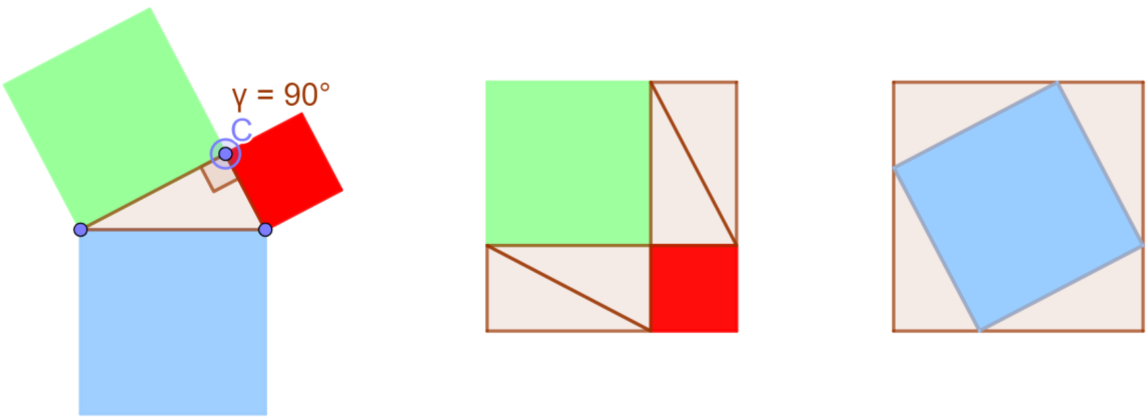
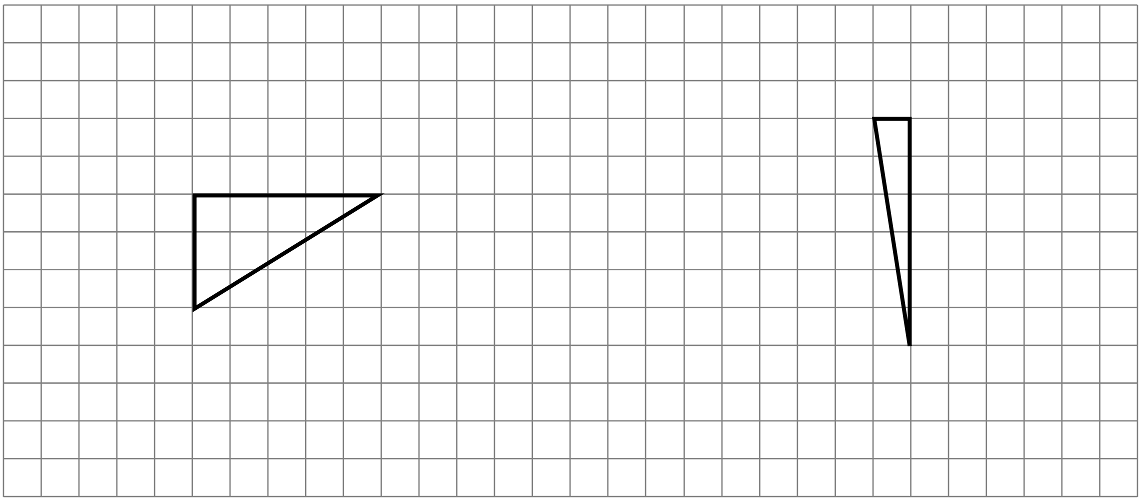


Bild „Pythagoras-dynamischer-Beweis“, Kück für LISUM, erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

Zeichnen von Quadraten über Dreieckseiten | **23**

- Markiere den rechten Winkel in den beiden Dreiecken.
- Zeige die Hypotenuse und die beiden Katheten.
- Zeichne über jeder Dreiecksseite ein Quadrat.
- Färbe die beiden Kathetenquadrate in derselben Farbe.
- Färbe das Hypotenusenquadrat in einer anderen Farbe.
- Bestimme die Flächeninhalte und erkläre, welche Flächeninhalte gleich groß sind.

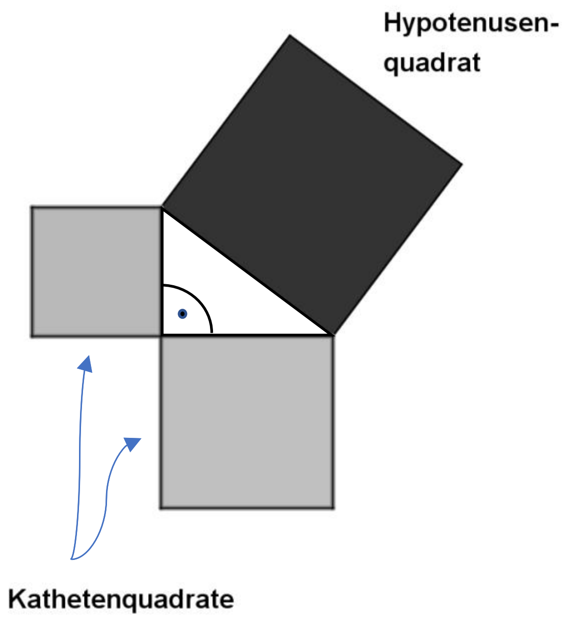


Formulieren des Satzes des Pythagoras | **24**

- Erkläre, wie die abgebildeten Quadrate zusammenhängen.
  Folgende Wörter können dir helfen:

rechtwinkliges Dreieck

messen	***quadrieren***
addieren	***vergleichen***
zeichnen	***Flächeninhalt***
Summe	***Katheten***



Raum und Form
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Inv. / Abb.
Argumentieren

Überprüfen von Aussagen zum Satz des Pythagoras	**25**

- Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Begründe.

In jedem rechtwinkligen Dreieck sind die drei Quadrate über den Seiten gleich groß.

In jedem rechtwinkligen Dreieck entspricht das Produkt der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

In jedem Dreieck entspricht die Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

In jedem rechtwinkligen Dreieck entspricht die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

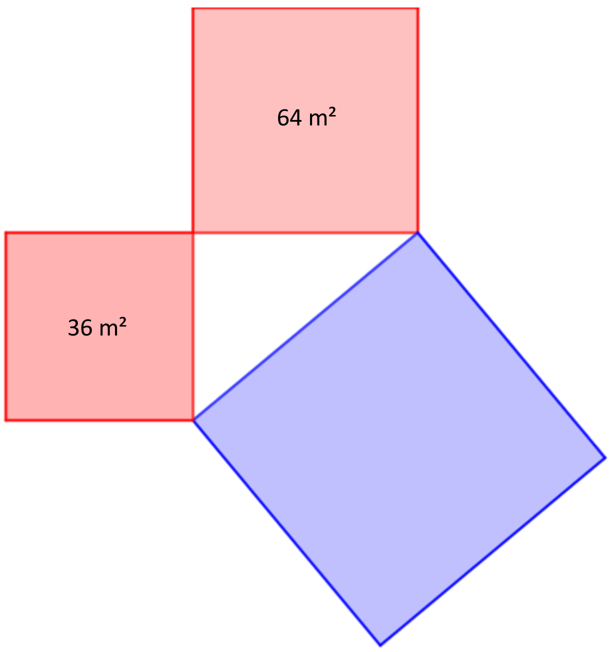
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Kathetenquadrates genauso groß wie der Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

Raum und Form / Messen
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Bestimmen von Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks	**26**

- Zeichne in das rechtwinklige Dreieck den rechten Winkel ein und markiere die Hypotenuse.
- Berechne aus den gegebenen Größen die Größe des Hypotenusenquadrates.
- Berechne die Seitenlängen der Dreiecksseiten. Erkläre, wie man dazu vorgeht.

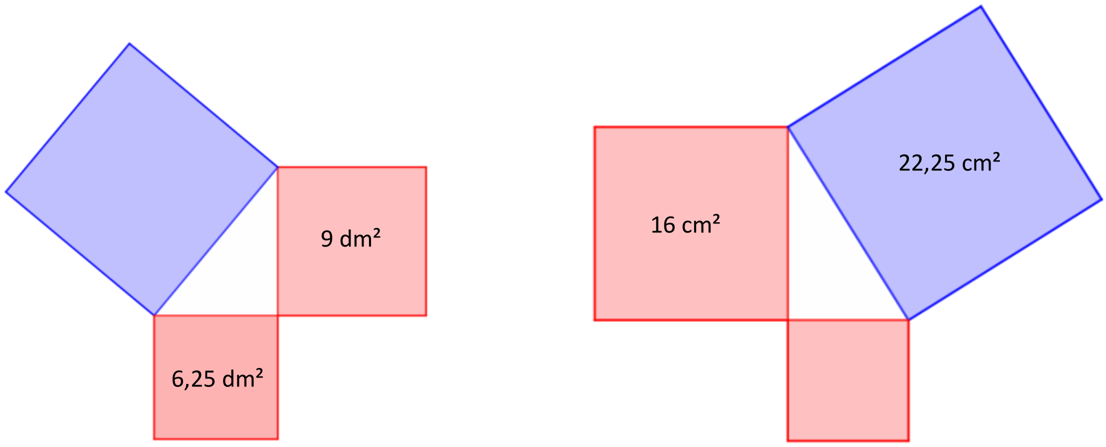


Erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

Ermitteln von Seitenlängen mithilfe des Satzes des Pythagoras

27

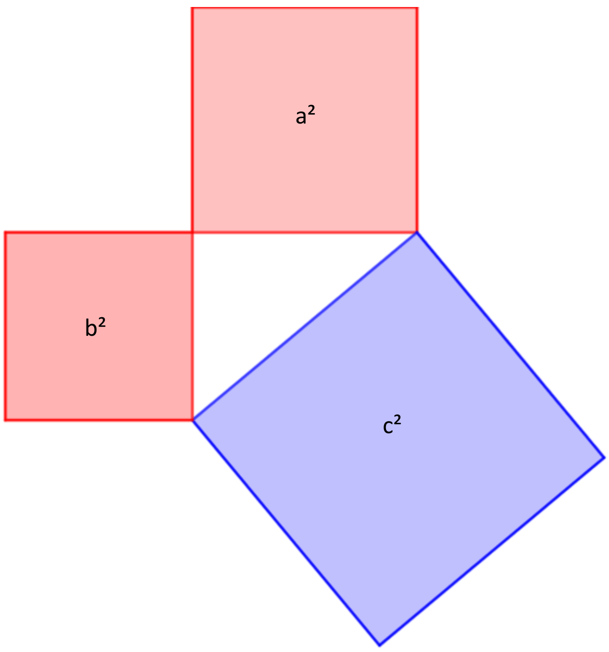
- Markiere die Hypotenuse.
- Berechne die fehlenden Flächeninhalte.
- Beschreibe, wie man die Seitenlängen berechnet.



Aufstellen einer Gleichung zum Satz des Pythagoras

28

- Zeichne in das rechtwinklige Dreieck den rechten Winkel ein und markiere die Hypotenuse.
- Stelle eine Gleichung für den Satz des Pythagoras auf.
- Beschrifte die Seiten des Dreiecks.

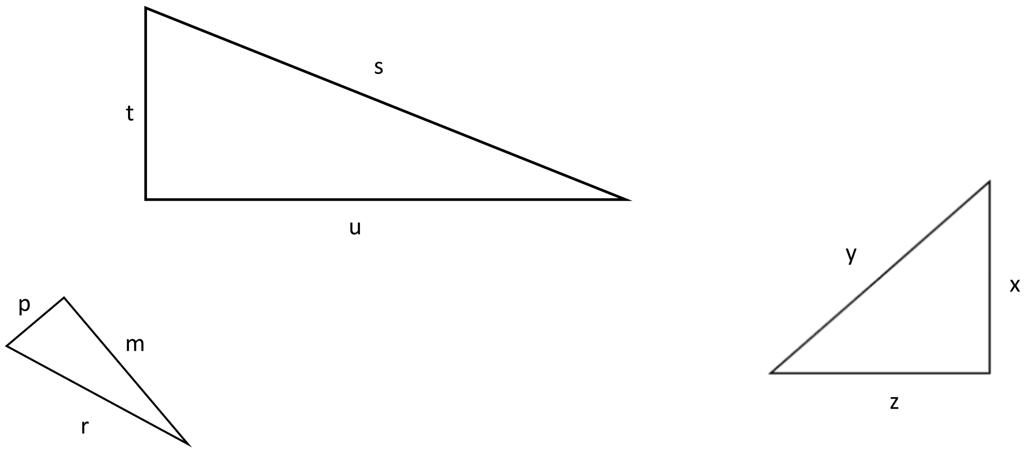


Raum und Form
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Variieren der Seitenbezeichnungen	**29**

- Zeichne in den rechtwinkligen Dreiecken den rechten Winkel ein und markiere die Hypotenuse.
- Formuliere für jedes Dreieck den Satz des Pythagoras als Gleichung mit den entsprechenden Bezeichnungen der Seiten.

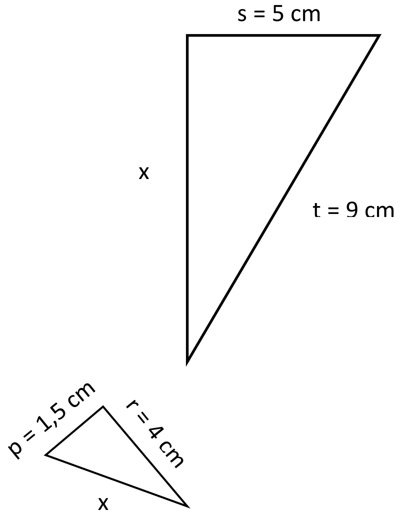


Raum und Form / Messen
Sekundarstufe I

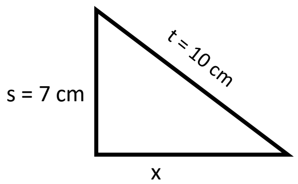
Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Berechnen von Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken	**30**

- Berechne für die beiden rechtwinkligen Dreiecke die jeweils fehlende Seitenlänge. Gehe wie im Beispiel rechts vor.



1) Skizze mit Variablen erstellen:



2) Gleichung aufstellen mit dem Satz des Pythagoras:
$x^2 + s^2 = t^2$

3) Einsetzen der gegebenen Längen:
$x^2 + (7\text{ cm})^2 = (10\text{ cm})^2$
$x^2 + 49\text{ cm}^2 = 100\text{ cm}^2$

4) Gleichung lösen:
$x^2 + 49\text{ cm}^2 = 100\text{ cm}^2 \mid -49\text{ cm}^2$
$x^2 = 51\text{ cm}^2$
$x = \sqrt{51}\text{ cm} \approx 7{,}14\text{ cm}$

Erkennen von rechtwinkligen Dreiecken in der Umwelt **31**

- Zeichne in jedes Foto ein rechtwinkliges Dreieck ein.
- Markiere den rechten Winkel. Schreibe die Fachbegriffe (Hypotenuse, Kathete) an die Seiten.

Bild „Tanne“, J. Diebold für LISUM, cc by sa 4.0 ; Bild 2 „Leiter“, B. Griese für LISUM, cc by sa 4.0

Bestimmen von Streckenlängen mithilfe des Satzes des Pythagoras **32**

Die Leiter wurde 1 m von der Wand entfernt aufgestellt.
Sie ist 2,80 m lang.

- Erkläre, wie man berechnen kann, in welcher Höhe die Leiter an der Wand lehnt.

Bild „Leiter“, B. Griese für LISUM, cc by sa 4.0

Raum und Form / Messen
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Invarianzen / Abbildungen

Überprüfen der Umkehrung des Satzes des Pythagoras — 33

Jan möchte ein Dreieck mit folgenden Seitenlängen zeichnen:

a = 6 cm; b = 8 cm; c = 10 cm.

Er vermutet, dass das Dreieck rechtwinklig sein könnte.

- Stimmt das? Überprüfe zeichnerisch.

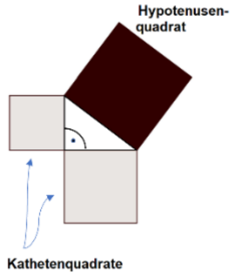
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Raum und Form / Messen
Sekundarstufe I

Eigenschaften / Beziehungen / Inv. / Abb.
Argumentieren

Verwenden der Umkehrung des Satzes des Pythagoras — 34

Der Satz des Pythagoras lautet:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, **dann** entspricht die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.



Auch die **Umkehrung** des Satzes ist richtig. Ergänze**:**
Wenn in einem Dreieck die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates entspricht, **dann** ist das Dreieck _________________________.

- Überprüfe rechnerisch, ob folgende Dreiecke rechtwinklig sind. Bilde dazu die Quadrate der Seitenlängen und nutze die Umkehrung des Satzes des Pythagoras (alle Seiten in cm).
- Wie kann man schnell erkennen, welche Seite die Hypotenuse sein könnte?

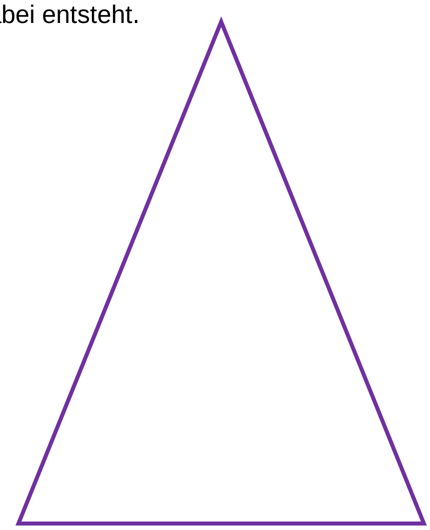
Dreieck	a	b	c		a²	b²	c²	Rechtwinklig: ja / nein
1	2	5	7					
2	5	11	12					
3	5	8	3					
4	0,33	0,56	0,65					

Erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

Berechnen einer Streckenlänge im besonderen Dreieck **35**

In einem gleichschenkligen Dreieck haben die Schenkel eine Länge von s = 7 cm,
die Länge der Basis beträgt b = 4 cm.

- Beschrifte das Dreieck und trage die gegebenen Seitenlängen ein.
- Zeichne die **Höhe h** ein, die senkrecht auf der Basis steht und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt geht.
- Zeige ein rechtwinkliges Dreieck, das dabei entsteht.
- Berechne die Länge der Höhe h.
  Erkläre deinen Rechenweg.

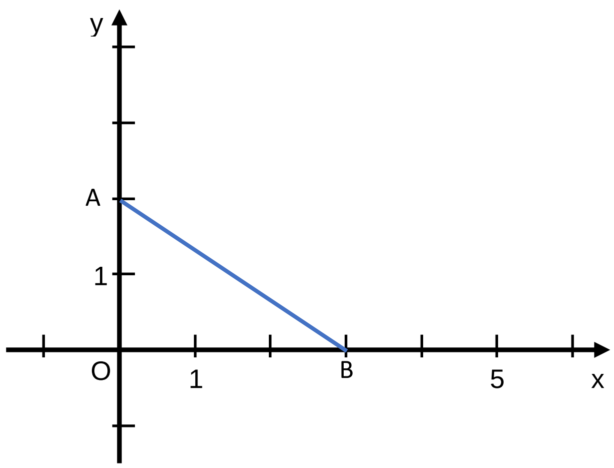


(Skizze nicht maßstabsgetreu)

Berechnen von Streckenlängen im Koordinatensystem (I) **36**

Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

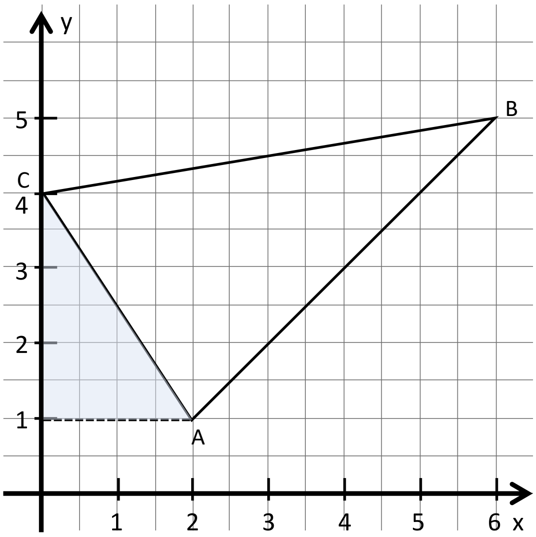
- Zeige, wo sich das rechtwinklige Dreieck befindet.
- Bestimme die Längen der Katheten.
- Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$ (1 LE entspricht 1 cm).



Berechnen von Streckenlängen im Koordinatensystem (II) **37**

Die Längen der Strecke $\overline{AC}$ soll bestimmt werden.

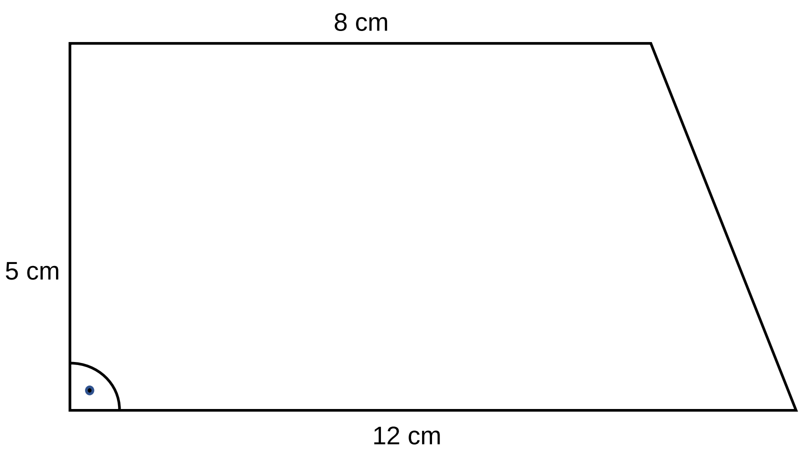
- Erkläre, warum das eingezeichnete blaue Hilfsdreieck dabei helfen kann.
- Berechne die Länge der Strecke $\overline{AC}$.
- Bestimme auch die Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ (1 LE entspricht 1 cm).
- Beschreibe, was alle Hilfsdreiecke gemeinsam haben.



Berechnen von Streckenlängen in Figuren (I) **38**

Anna möchte den Umfang des Trapezes berechnen.
Sie sagt: „Leider fehlt mir dazu eine Seitenlänge“.

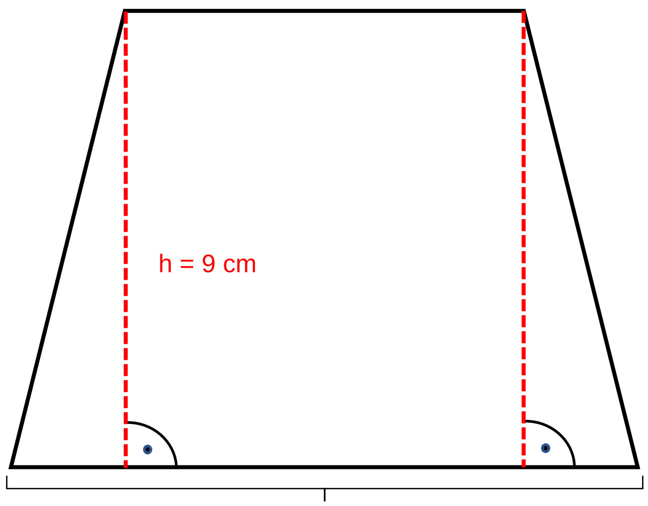
- Erkläre, wo sie ein rechtwinkliges Dreieck einzeichnen kann,
  um die fehlende Seitenlänge zu bestimmen.
- Berechne die Länge der fehlenden Seite (Skizze nicht maßstabsgetreu).
- Berechne den Umfang.



Berechnen von Streckenlängen in Figuren (II) | **39**

Hans möchte den Umfang des gleichschenkligen Trapezes berechnen.
Er hat zwei Höhen eingezeichnet.

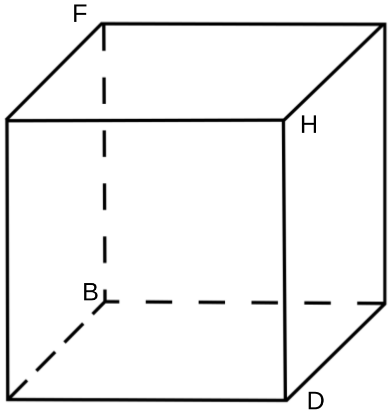
- Erkläre, welche Grundformen Hans dadurch erhalten hat und warum das Zerlegen sinnvoll ist.
- Erkläre, wie man den Umfang berechnen kann.



Finden von rechtwinkligen Dreiecken in einem Würfel | **40**

***Material**: Kantenmodell eines Würfels, Holzstäbe*

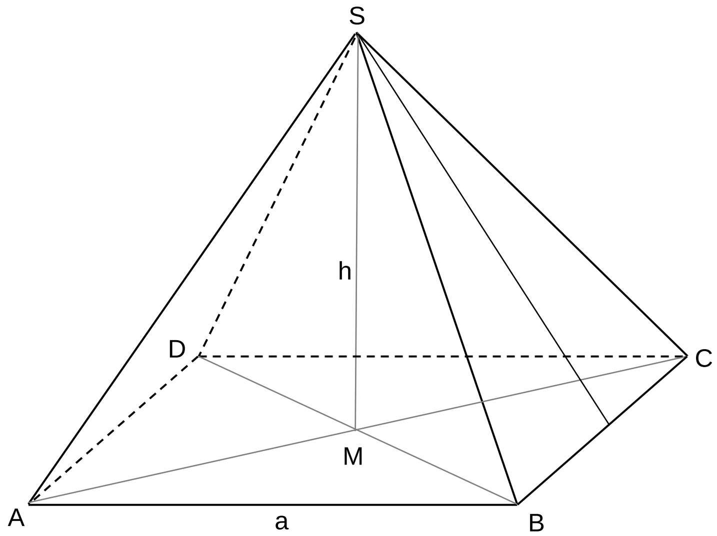
- Zeige im Modell, wo sich rechte Winkel befinden.
- Zeige im Modell mit den Stäben, wo sich rechtwinklige Dreiecke finden lassen.
- Zeichne in das Schrägbild verschiedene Seitendiagonale ein und markiere rechtwinklige Dreiecke, die du durch das Einzeichnen erhältst.
- Die Strecke $\overline{GA}$ ist eine Raumdiagonale. Zeige sie am Modell und zeichne sie in das Schrägbild.
- Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ein, bei dem die Raumdiagonale die Hypotenuse ist.



Finden von rechtwinkligen Dreiecken in einer Pyramide | **41**

***Material**: Kantenmodell einer Pyramide*

- Zeige im Modell, wo sich in der Grundfläche rechte Winkel befinden.
- Zeige im Modell, wo sich in der Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck befindet.
- Zeichne in das Schrägbild dieses rechtwinklige Dreieck ein und markiere den rechten Winkel.
- Zeichne weitere rechtwinklige Dreiecke ein, die sich in der Pyramide finden lassen.



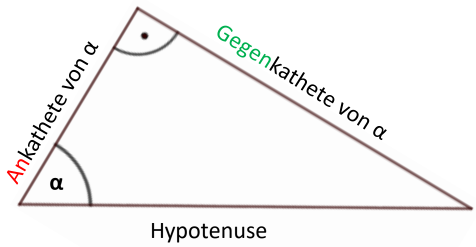
Erkennen von Ankathete und Gegenkathete (1) | **42**

In einem rechtwinkligen Dreieck wird zwischen Ankathete und Gegenkathete eines Winkels unterschieden.

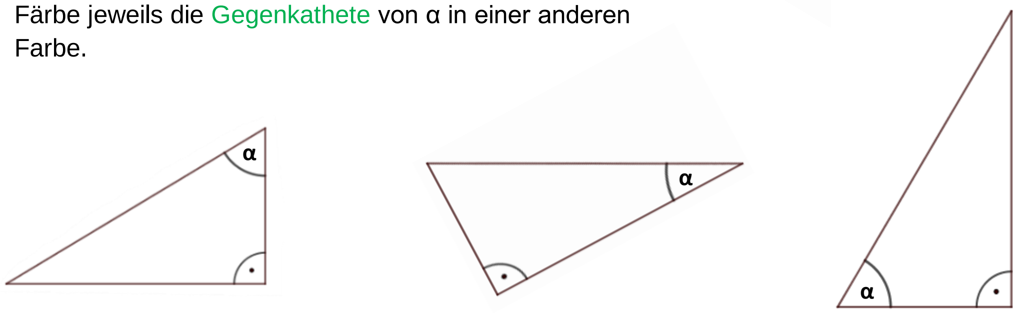
Dazu wird zuerst ein spitzer Winkel ausgewählt (im Bild: α).

Die Ankathete ist die Kathete, die an dem ausgewählten Winkel liegt.

Die Gegenkathete ist die Kathete, die dem ausgewählten Winkel gegenüberliegt.



- Färbe jeweils die Ankathete von α rot.
- Färbe jeweils die Gegenkathete von α in einer anderen Farbe.



Erkennen von Ankathete und Gegenkathete (2)

- Finde für jedes Dreieck die Ankathete und die Gegenkathete von α.

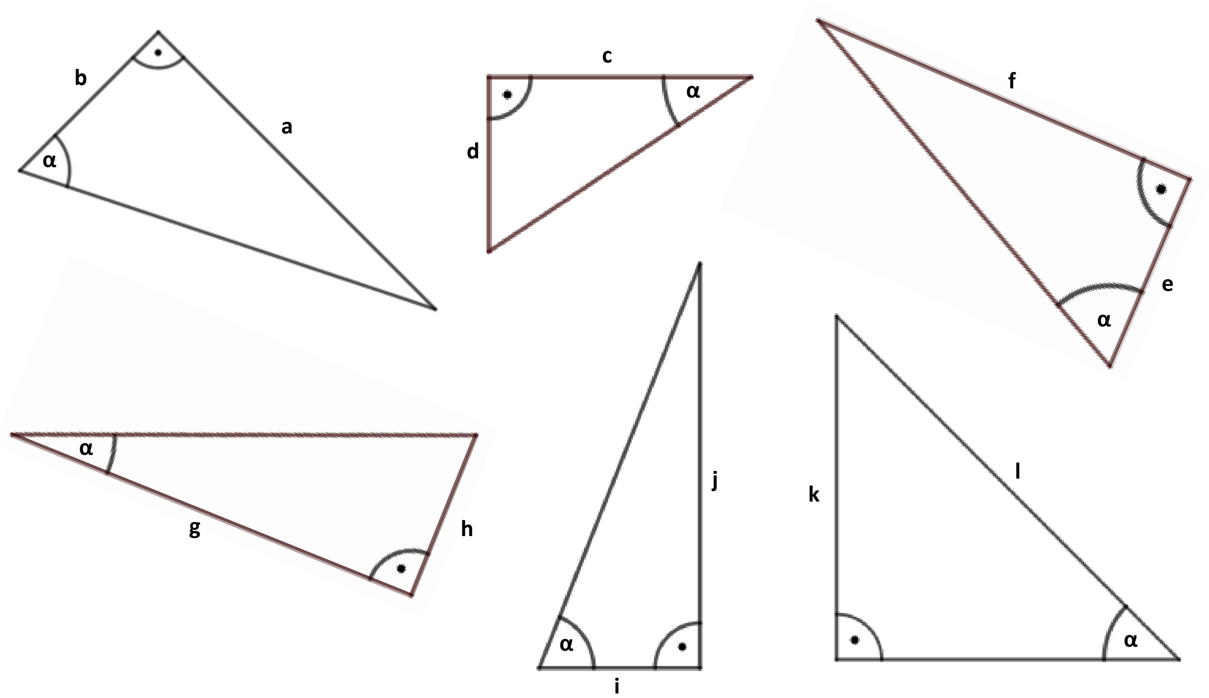


Bild „Sechs beschriftete rechtwinklige Dreiecke“, Dahlke für LISUM, erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

Erkennen von Ankathete und Gegenkathete (3)

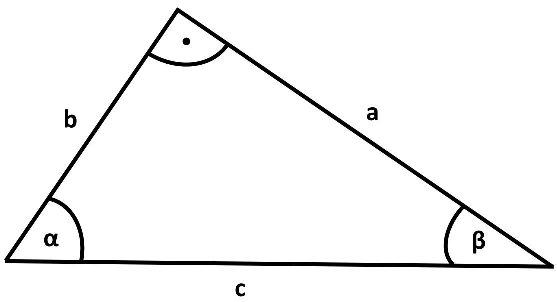
Für dieses Dreieck gilt:

Die Seite a ist die Ankathete von β.

Sie ist auch die Gegenkathete von α.

Die Seite b ist die Ankathete von α.

Sie ist auch die Gegenkathete von β.



- Formuliere ähnliche Aussagen für die zwei unten abgebildeten Dreiecke.

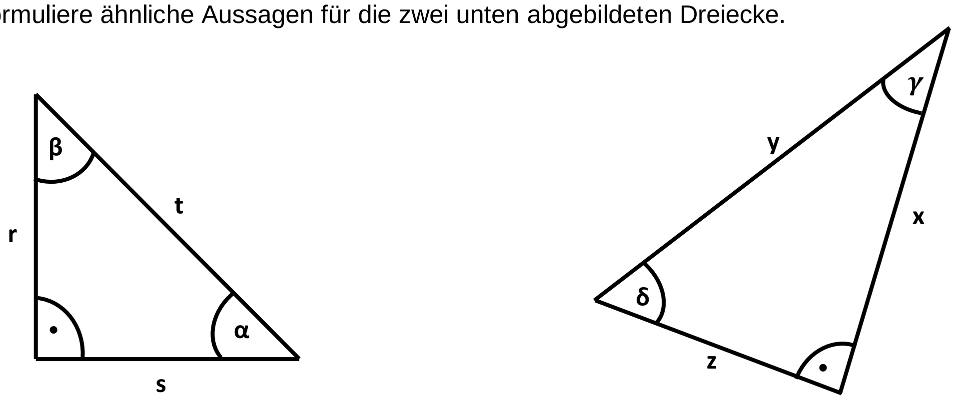
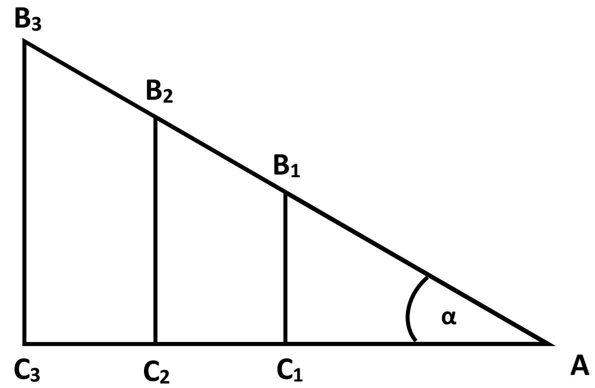


Bild „Drei beschriftete rechtwinklige Dreiecke“, Dahlke für LISUM, cc by sa 4.0

Berechnen des Verhältnisses von Gegenkathete und Hypotenuse | 45

Im Bild sind drei rechtwinklige Dreiecke dargestellt. Die Dreiecke haben den Winkel α gemeinsam.

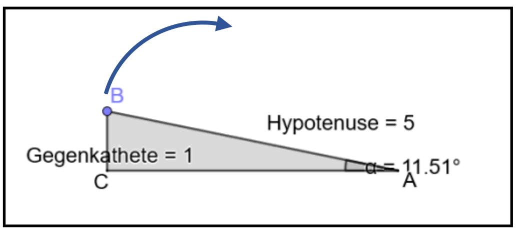


- Miss für das kleine Dreieck AB_1C_1 die Längen der Hypotenuse und der Gegenkathete von α.
- Berechne den Quotienten $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$.
- Miss auch für die Dreiecke AB_2C_2 und AB_3C_3 die Längen der Hypotenuse und der Gegenkathete von α und berechne jeweils den Quotienten $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$.
- Beschreibe, was du feststellst.

Bild „Drei beschriftete rechtwinklige Dreiecke mit einem gemeinsamen Winkel", Dahlke für LISUM, cc by sa 4.0

Berechnen des Verhältnisses von Gegenkathete und Hypotenuse bei größer werdendem Winkel | 46

- Öffne den Link https://www.geogebra.org/m/hrdfqw4q oder öffne die Webadresse mit dem QR-Code (unten rechts).
- Bewege den Punkt B (blau) von links unten nach rechts oben.



- Ergänze folgende Sätze:

  Der Winkel α …

  Die Hypotenuse …

  Die Gegenkathete …

  Das Verhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ …

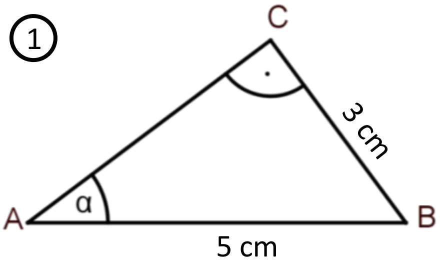
  Benutze dazu die Formulierungen: wird kleiner / bleibt gleich / wird größer.

Bild „Screenshot aus GeoGebra", Dahlke für LISUM, erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0

Definition des Sinus

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist jedem spitzen Winkel das Verhältnis aus seiner Gegenkathete und der Hypotenuse zugeordnet.

Dieses Verhältnis nennt man Sinus eines Winkels: $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$



- Miss den Winkel α.
  Berechne den zugehörigen Sinus-Wert.
  Prüfe mithilfe des Taschenrechners.

- Miss auch für die Dreiecke 2 und 3 jeweils den Winkel α und berechne die Sinuswerte. Was stellst du fest?

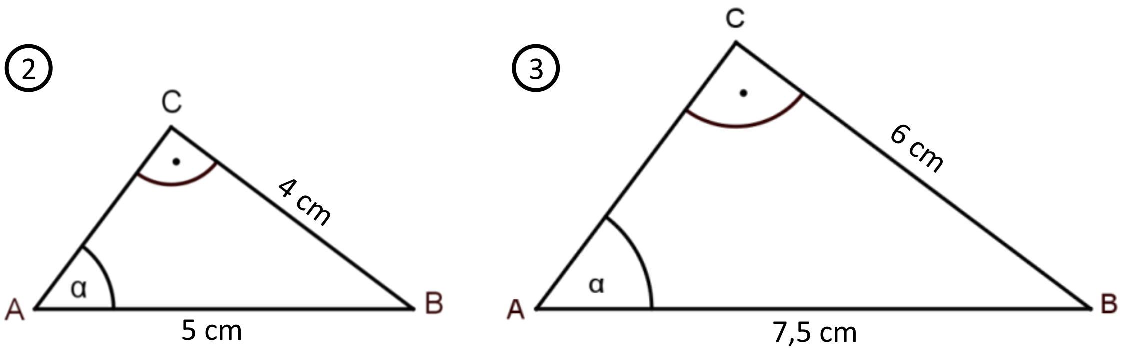
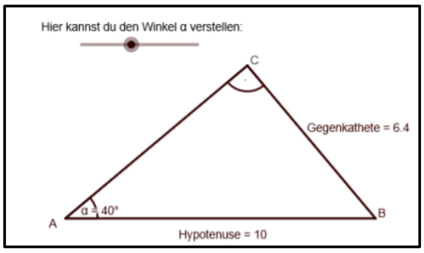


Bild „Drei rechtwinklige Dreiecke mit Bemaßung", Dahlke für LISUM, erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

Berechnen des Sinuswertes (1)

- Öffne den Link https://www.geogebra.org/m/awggrtpx oder öffne die Webadresse mit dem QR-Code.
- Verändere an dem Schieberegler oben den Winkel α.
- Berechne für jeden Winkel, der in der Tabelle angegeben ist, den Sinuswert sin(α) und trage ihn in die Tabelle ein.



Winkel α	sin(α)
10°	
20°	
30°	
40°	
50°	
60°	
70°	
80°	

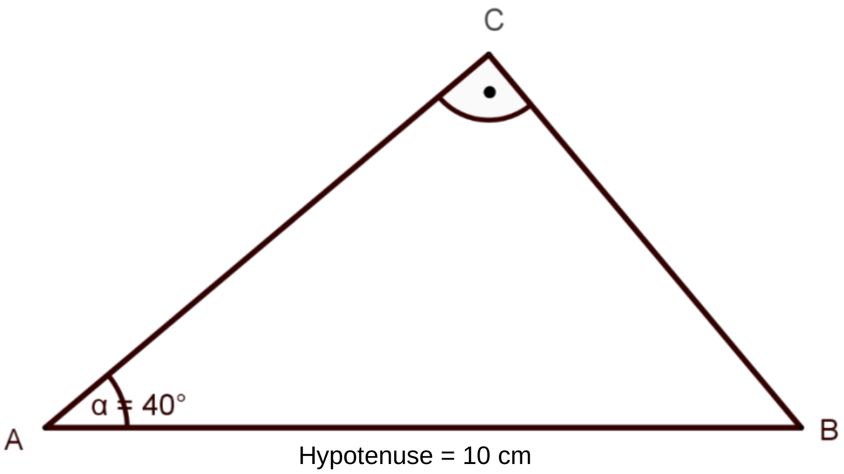
Bild „Screenshot GeoGebra", Dahlke für LISUM, erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

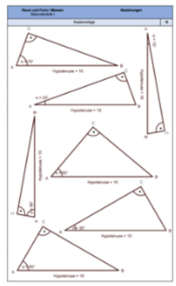
Berechnen des Sinuswertes (2)

Material: *Kopiervorlage G*

- Miss für das untenstehende Dreieck die Gegenkathete von α.
- Berechne Wert für sin(α) und trage ihn in die Tabelle an der entsprechenden Stelle ein.
- Berechne auch die Sinuswerte für die Dreiecke auf der Kopiervorlage G und trage sie in die Tabelle ein.

Winkel α	sin(α)
10°	
20°	
30°	
40°	
50°	
60°	
70°	
80°	



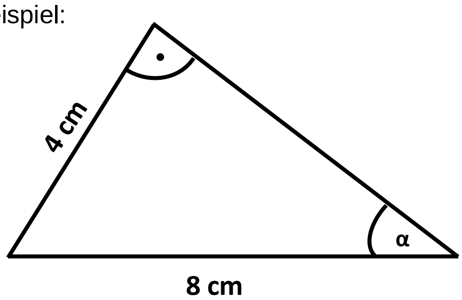


Kopiervorlage G

Berechnen des Winkels mithilfe des Sinus

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist jedem spitzen Winkel genau ein Sinuswert zugeordnet.
Umgekehrt ist auch jedem positiven Sinuswert ein spitzer Winkel zugeordnet.
Mithilfe des Taschenrechners kann der Winkel bestimmt werden.

Beispiel:



Wenn die Länge der Gegenkathete und die Länge der Hypotenuse gegeben sind, kann man mit dem Sinus den Winkel α bestimmen.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

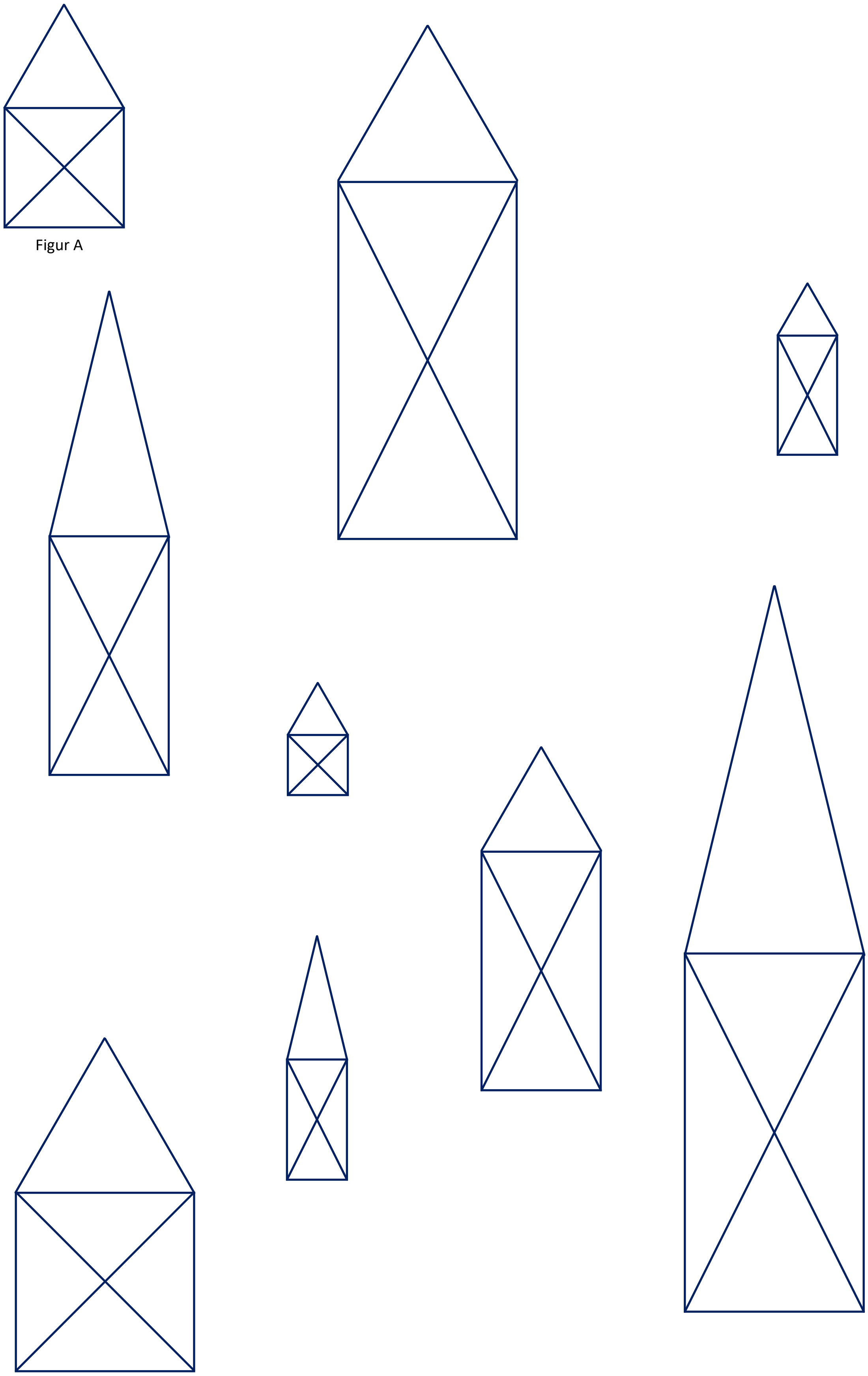
$$\sin(\alpha) = \frac{4\text{ cm}}{8\text{ cm}} = 0{,}5 \qquad | \text{ TR-Einsatz, s.u.}$$

$\rightarrow$ $\underline{\alpha = 30°}$

- Berechne für das gegebene Dreieck selbst den Winkel α mit dem Taschenrechner:

SHIFT | sin | (| 4 | : | 8 |) | =

Hinweis: Bei einigen Taschenrechnern gibt es keine SHIFT -Taste, sondern eine 2ndF -Taste.

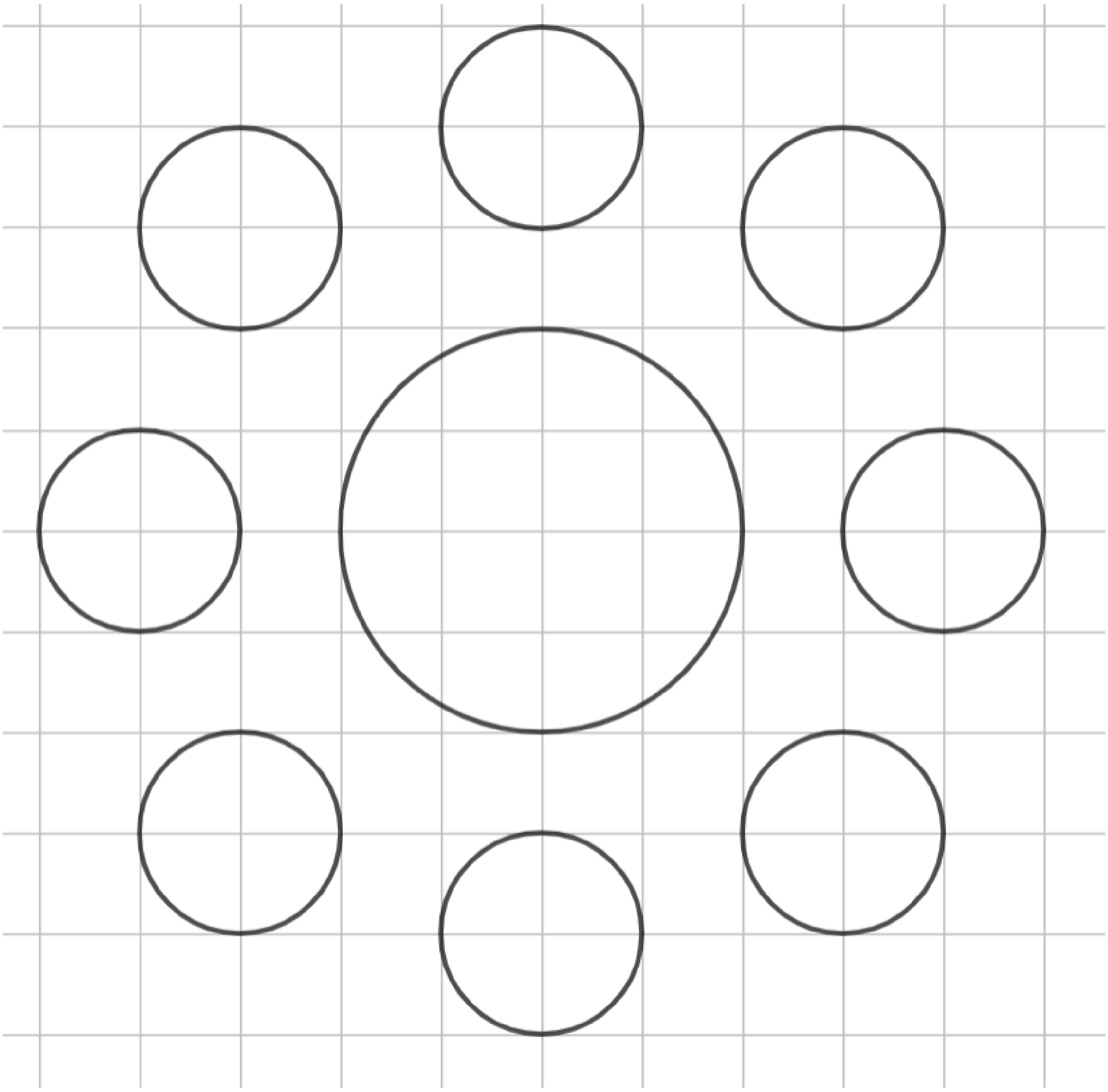


Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Karten bitte ausschneiden.

10 cm in der Originalfigur entsprechen 2 cm in der Bildfigur. **2**	Maßstab 10:1 **D**	10 cm in der Originalfigur entsprechen 40 cm in der Bildfigur. **6**	Maßstab 4:1 **H**
1 cm in der Originalfigur entspricht 2 cm in der Bildfigur. **1**	1000 cm in der Originalfigur entsprechen 10 cm in der Bildfigur. **4**	Maßstab 1:7 **F**	1 cm in der Originalfigur entspricht 10 cm in der Bildfigur. **8**
Maßstab 1:100 **B**	Maßstab 2:1 **C**	35 cm in der Originalfigur entsprechen 5 cm in der Bildfigur. **5**	Maßstab 1:5 **G**
Maßstab 1:3 **A**	2 cm in der Originalfigur entsprechen 10 cm in der Bildfigur. **3**	Maßstab 5:1 **E**	15 cm in der Originalfigur entsprechen 5 cm in der Bildfigur. **7**

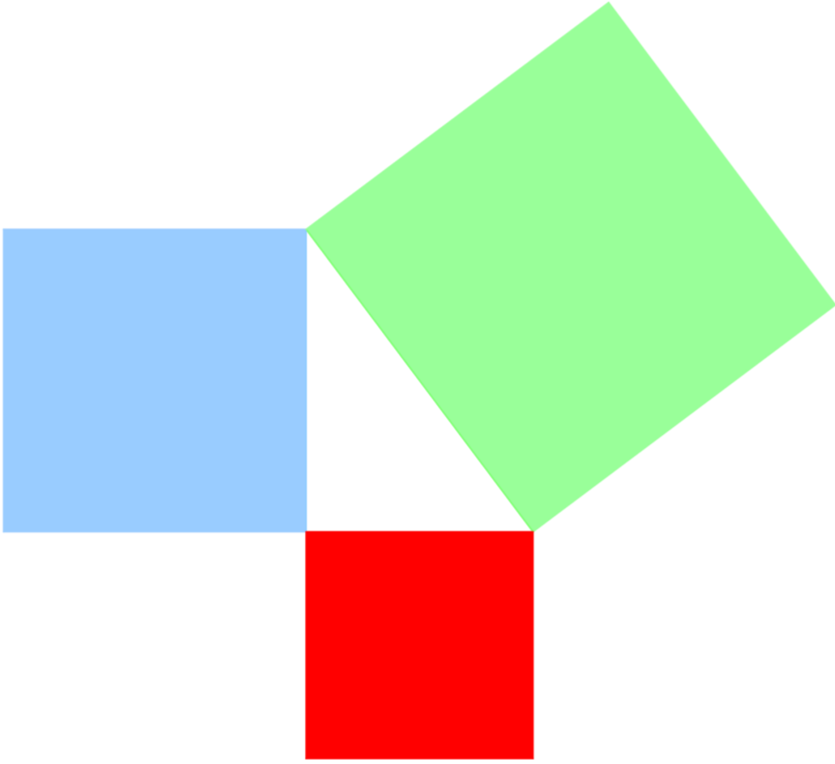
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0



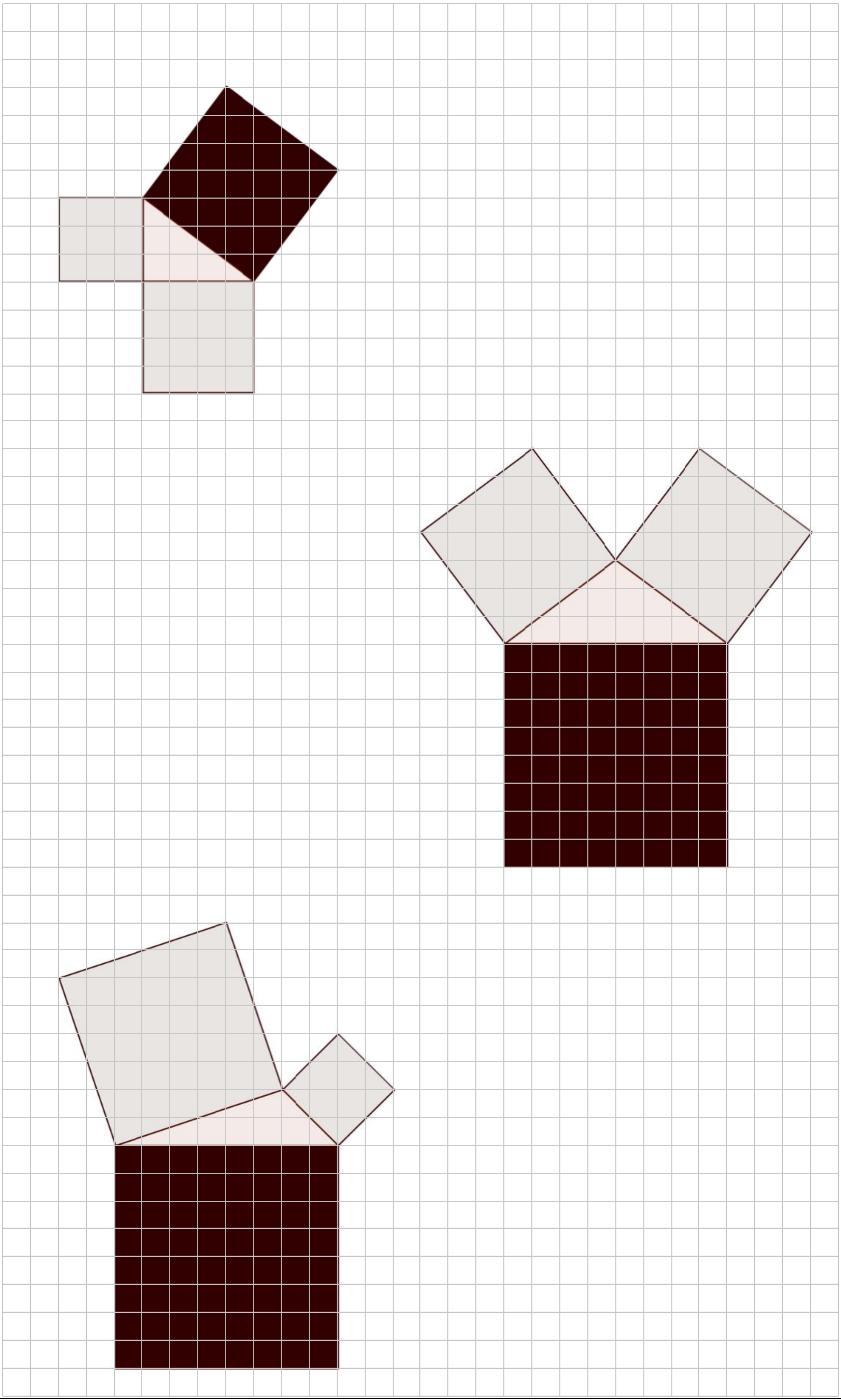
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

Erstellt mit GeoGebra, cc by sa 4.0.

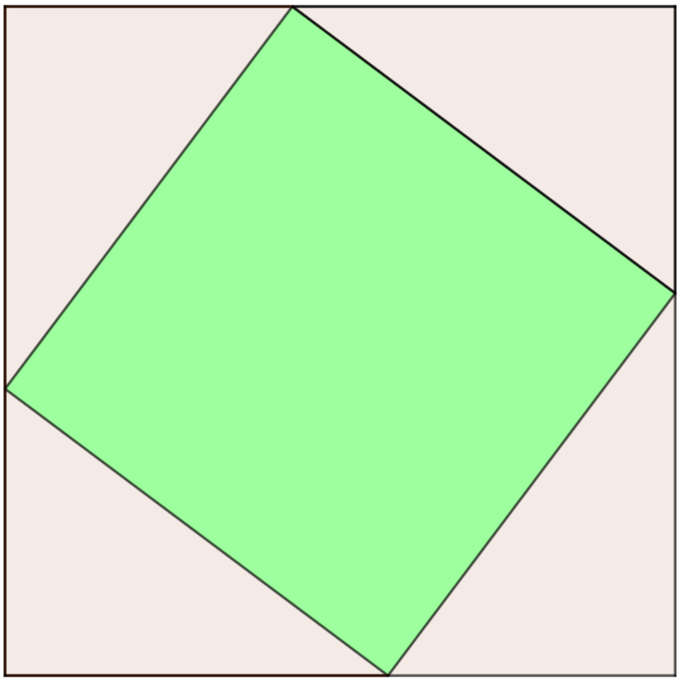
Kopiervorlage D | **D**



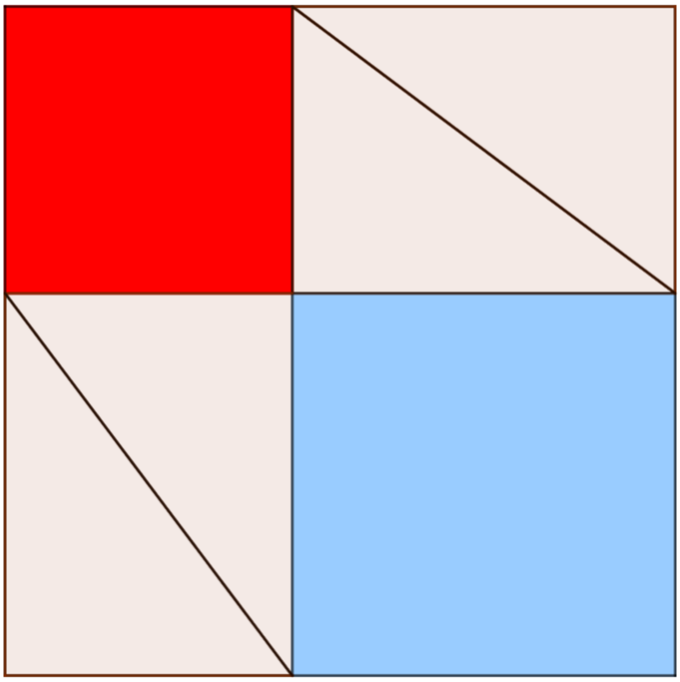
Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0



Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0

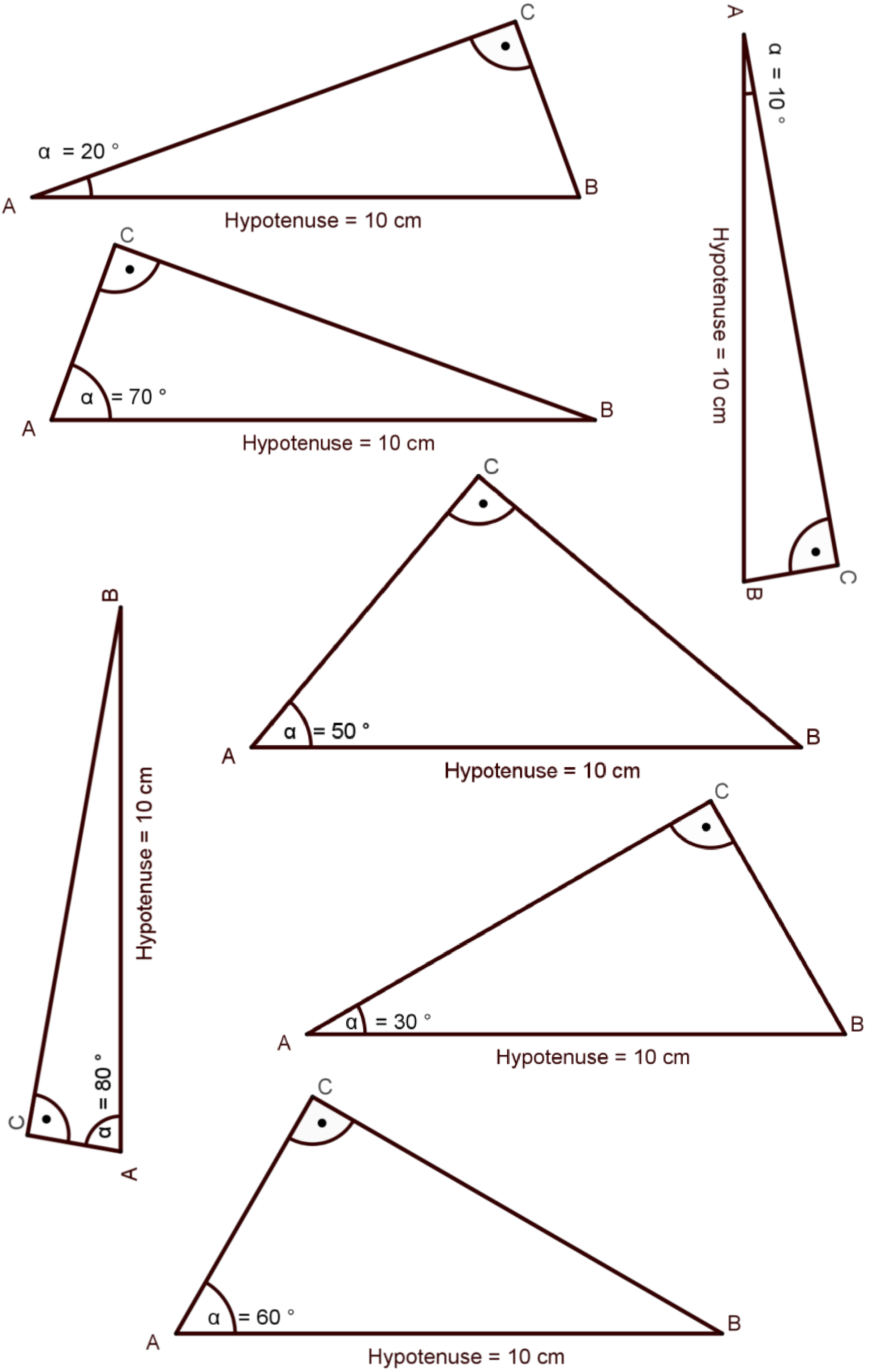


Figur 1



Figur 2

Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0



Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht, LISUM, CC-BY-SA 4.0